PROBLEMS

Toutes solutions aux problèmes dans ce numéro doivent nous parvenir au plus tard le **1er juin 2009**. *Une étoile* ($\star$) *après le numéro indique que le problème a été soumis sans solution.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais. Dans la section des solutions, le problème sera publié dans la langue de la principale solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, de Collège universitaire de Saint-Boniface, Winnipeg, MB et Jean-Marc Terrier, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

3371. Correction. *Proposé par George Tsintsifas, Thessalonique, Grèce.*

Soit ABC un triangle de côtés respectifs a, b et c, et soit M un de ses points intérieur. Les droites AM, BM et CM coupent respectivement les côtés opposés aux points A_1, B_1 et C_1. Les droites passant par M et perpendiculaires aux côtés coupent respectivement BC, CA et AB en A_2, B_2, et C_2. Soit p_1, p_2 et p_3 les distances respectives de M aux côtés BC, CA et AB. Montrer que

$$\frac{[A_2B_2C_2]}{[A_1B_1C_1]} = \frac{(ap_1+bp_2)(bp_2+cp_3)(cp_3+ap_1)}{2a^2b^2c^2}\left(\frac{a}{p_1}+\frac{b}{p_2}+\frac{c}{p_3}\right),$$

où $[KLM]$ désigne l'aire du triangle KLM.

3389. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Pour $a \in \mathbb{R}$, la suite (x_n) est définie par $x_0 = a$ et $x_{n+1} = 4x_n - x_n^2$ pour tout $n \geq 0$. Montrer qu'il existe un nombre infini de valeurs $a \in \mathbb{R}$ telles que la suite (x_n) est périodique.

3390. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Montrer que si A, B, C et D sont les solutions de

$$X^2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix},$$

alors $A^{2007}+B^{2007}+C^{2007}+D^{2007} = O$, où O est la matrice nulle de taille 2×2.

3391. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que AC et BD se coupent à angle droit en P, et soit respectivement I, J, K et L les milieux de AB, BC, CD et DA. Montrer que les cercles (PIJ), (PJK), (PKL) et (PLI) sont congruents si et seulement si $ABCD$ est cyclique.

3392. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit A, B, C, D et E concycliques avec respectivement V et W sur les droites AB et AD. Montrer que si la droite CE, la parallèle à CB par V et la parallèle à CD par W sont concourantes, alors les triangles EVB et EWD sont semblables. La réciproque est-elle vraie ?

3393. *Proposé par Dragoljub Milošević et G. Milanovac, Serbie.*

Soit le triangle ABC, où $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et où s est le demi périmètre. Montrer que

$$\frac{y+z}{x} \cdot \frac{A}{a(s-a)} + \frac{z+x}{y} \cdot \frac{B}{b(s-b)} + \frac{x+y}{z} \cdot \frac{C}{c(c-a)} \ \geq\ \frac{9}{s^2} \,,$$

où les angles A, B et C sont mesurés en radians et x, y et z sont des nombres réels positifs quelconques.

3394. *Proposé par Dragoljub Milošević et G. Milanovac, Serbie.*

Soit $ABCD$ un tétraèdre ; désignons par h_A et m_A les longueurs respectives de la hauteur et de la médiane issues du sommet A sur la face opposée BCD. Si V est le volume du tétraèdre, montrer que

$$(h_A + h_B + h_C + h_D)(m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2) \ \geq\ \frac{128}{\sqrt{3}} V \,.$$

3395. *Proposé par Taichi Maekawa, Takatsuki, Préfecture d'Ōsaka, Japon.*

Soit le triangle ABC ; dénotons par H son orthocentre et par R le rayon de son cercle circonscrit. Montrer que $4R^3 - (l^2+m^2+n^2)R - lmn = 0$, où $AH = l$, $BH = m$ et $CH = n$.

3396. *Proposé par Neven Jurič, Zagreb, Croatie.*

Soit n un entier positif et, pour i, j et k dans $\{1, 2, \dots, n\}$, posons

$$\begin{aligned} a_{ijk} \ &= \ 1 \ + \ \mathrm{mod}(k-i+j-1,n) \ + \ n\mathrm{mod}(i-j+k-1,n) \\ &\quad + \ n^2\mathrm{mod}(i+j+k-2,n) \,, \end{aligned}$$

où $\mathrm{mod}(a,n)$ est le résidu de a modulo n, choisi parmi 0, 1, $\dots$, $n-1$. Pour quels n le cube portant les valeurs a_{ijk} est-il un cube magique ? (Ici, le mot "magique" se réfère au fait que la somme des a_{ijk} est constante si deux des indices restent fixes et l'autre varie, et de plus que les sommes des diagonales principales du cube sont aussi égales à cette même constante.)

3397. *Proposé par José Luis Díaz-Barrero, Université Polytechnique de Catalogne, Barcelone, Espagne.*

Évaluer
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^n \frac{\sqrt{n^2-x^2}}{2+x^{-x}}\, dx\,.$$

3398. *Proposé par Bruce Shawyer, Université Memorial de Terre-Neuve, St. John's, NL.*

Soit l'équation
$$\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor \;+\; \left(n - 10\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor\right)\cdot 10^{\lfloor \log_{10} n \rfloor} \;=\; \frac{2n}{3}\,,$$

(a) montrer que $n = 5294117647058823$ est une solution de cette équation,

(b) ★ déterminer toute autre solution entière et positive de cette équation.

3399. *Proposed by Vincenţiu Rădulescu, Université de Craiova, Craiova, Roumanie.*

Montrer qu'il n'existe aucune fonction positive et deux fois différentiable $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ telle que $f(x)f''(x) + 1 \le 0$ pour tout $x \ge 0$.

3400. *Proposé par Yakub N. Aliyev, Université d'Etat de Bakou, Bakou, Azerbaïdjan.*

Pour des entiers positifs m et k, posons $(m)_k = m(1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1})$; par exemple, $(1)_2 = 11$ et $(3)_4 = 3333$. Déterminer tous les nombres réels α tels que
$$\left\lfloor 10^n \sqrt{(1)_{2n} + \alpha} \right\rfloor \;=\; (3)_{2n} \;-\; \left\lfloor \frac{5-9\alpha}{6} \right\rfloor$$
est valide pour tout entier positif n, où $\lfloor x \rfloor$ dénote le plus grand entier ne dépassant pas x.

.·.

3371. Correction. *Proposed by George Tsintsifas, Thessaloniki, Greece.*

Let ABC be a triangle with a, b, and c the lengths of the sides opposite the vertices A, B, and C, respectively, and let M be an interior point of $\triangle ABC$. The lines AM, BM, and CM intersect the opposite sides at the points A_1, B_1, and C_1, respectively. Lines through M perpendicular to the sides of $\triangle ABC$ intersect BC, CA, and AB at A_2, B_2, and C_2, respectively. Let p_1, p_2, and p_3 be the distances from M to the sides BC, CA, and AB, respectively. Prove that
$$\frac{[A_2B_2C_2]}{[A_1B_1C_1]} \;=\; \frac{(ap_1+bp_2)(bp_2+cp_3)(cp_3+ap_1)}{2a^2b^2c^2}\left(\frac{a}{p_1}+\frac{b}{p_2}+\frac{c}{p_3}\right)\,,$$
where $[KLM]$ denotes the area of triangle KLM.

3389. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

For $a \in \mathbb{R}$ define a sequence (x_n) by $x_0 = a$ and $x_{n+1} = 4x_n - x_n^2$ for all $n \geq 0$. Prove that there exist infinitely many $a \in \mathbb{R}$ such that the sequence (x_n) is periodic.

3390. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Prove that if A, B, C, and D are the solutions of

$$X^2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix},$$

then $A^{2007} + B^{2007} + C^{2007} + D^{2007} = O$, where O is the 2×2 zero matrix.

3391. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let $ABCD$ be a convex quadrilateral such that AC and BD intersect in right angles at P, and let I, J, K, and L be the mid-points of AB, BC, CD, and DA, respectively. Show that the circles (PIJ), (PJK), (PKL), and (PLI) are congruent if and only if $ABCD$ is cyclic.

3392. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let A, B, C, D, and E be concyclic with V and W on the lines AB and AD, respectively. Show that if the line CE, the parallel to CB through V, and the parallel to CD through W are concurrent, then triangles EVB and EWD are similar. Does the converse hold?

3393. *Proposed by Dragoljub Milošević and G. Milanovac, Serbia.*

Let ABC be a triangle with $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, and semiperimeter s. Prove that

$$\frac{y+z}{x} \cdot \frac{A}{a(s-a)} + \frac{z+x}{y} \cdot \frac{B}{b(s-b)} + \frac{x+y}{z} \cdot \frac{C}{c(c-a)} \geq \frac{9}{s^2},$$

where the angles A, B, and C are measured in radians and x, y, and z are any positive real numbers.

3394. *Proposed by Dragoljub Milošević and G. Milanovac, Serbia.*

Let $ABCD$ be a tetrahedron with h_A and m_A the lengths of the altitude and the median from vertex A to the opposite face BCD, respectively. If V is the volume of the tetrahedron, prove that

$$(h_A + h_B + h_C + h_D)(m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2) \geq \frac{128}{\sqrt{3}} V.$$

3395. *Proposed by Taichi Maekawa, Takatsuki City, Osaka, Japan.*

Let triangle ABC have orthocentre H and circumradius R. Prove that $4R^3 - (l^2 + m^2 + n^2)R - lmn = 0$, where $AH = l$, $BH = m$, and $CH = n$.

3396. *Proposed by Neven Jurič, Zagreb, Croatia.*

Let n be a positive integer, and for i, j, and k in $\{1, 2, \dots, n\}$ let

$$\begin{aligned} a_{ijk} &= 1 + \operatorname{mod}(k-i+j-1,n) + n\operatorname{mod}(i-j+k-1,n) \\ &\quad + n^2\operatorname{mod}(i+j+k-2,n)\,, \end{aligned}$$

where $\operatorname{mod}(a,n)$ is the residue of a modulo n in the range $0, 1, \dots, n-1$. For which n is the cube with entries a_{ijk} a magic cube? (Here "magic" means that the sum of a_{ijk} is constant if two indices are fixed and the third index varies, and also the sums along the great diagonals of the cube are equal to this constant.)

3397. *Proposed by José Luis Díaz-Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.*

Evaluate

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^n \frac{\sqrt{n^2-x^2}}{2+x^{-x}}\,dx\,.$$

3398. *Proposed by Bruce Shawyer, Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL.*

Given the equation

$$\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + \left(n - 10\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor\right) \cdot 10^{\lfloor \log_{10} n \rfloor} = \frac{2n}{3}\,,$$

(a) show that $n = 5294117647058823$ is a solution,

(b) ★ find all other positive integer solutions of the equation.

3399. *Proposed by Vincenţiu Rădulescu, University of Craiova, Craiova, Romania.*

Prove that there does not exist a positive, twice differentiable function $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ such that $f(x)f''(x) + 1 \le 0$ for all $x \ge 0$.

3400. *Proposed by Yakub N. Aliyev, Baku State University, Baku, Azerbaijan.*

For positive integers m and k let $(m)_k = m(1+10+10^2+\cdots+10^{k-1})$, for example, $(1)_2 = 11$ and $(3)_4 = 3333$. Find all real numbers α such that

$$\left\lfloor 10^n \sqrt{(1)_{2n} + \alpha} \right\rfloor = (3)_{2n} - \left\lfloor \frac{5-9\alpha}{6} \right\rfloor$$

holds for each positive integer n, where $\lfloor x \rfloor$ is the greatest integer not exceeding x.