PROBLEMS

Solutions to problems in this issue should arrive no later than **1 October 2007**. *An asterisk* ($\star$) *after a number indicates that a problem was proposed without a solution.*

Each problem is given in English and French, the official languages of Canada. In issues 1, 3, 5, and 7, English will precede French, and in issues 2, 4, 6, and 8, French will precede English. In the solutions' section, the problem will be stated in the language of the primary featured solution.

The editor thanks Jean-Marc Terrier and Martin Goldstein of the University of Montreal for translations of the problems.

3226. *Proposed by Ovidiu Furdui, student, Western Michigan University, Kalamazoo, MI, USA.*

Let ABC be a triangle. Let $S = \sum_{\text{cyclic}} \cos\frac{A}{2}$ and $P = \prod_{\text{cyclic}} \cos\frac{A}{2}$. Prove that

(a) $\frac{S}{P} \leq 2\sqrt{3}\max\left\{\sec\frac{A}{2},\, \sec\frac{B}{2},\, \sec\frac{C}{2}\right\}$;

(b) $\frac{S}{P} \geq 4\max\left\{\sec^2\frac{B-C}{4},\, \sec^2\frac{A-B}{4},\, \sec^2\frac{C-A}{4}\right\}$.

3227. *Proposed by Ovidiu Furdui, student, Western Michigan University, Kalamazoo, MI, USA.*

Let $\alpha \in [0,1]$ and define

$$x_n = \left(\frac{\zeta(2) + \cdots + \zeta(n+1)}{n}\right)^{n^\alpha},$$

where ζ is the Riemann Zeta Function, defined by $\zeta(k) = \sum\limits_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^k}$. Prove that

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 1, & \text{if } \alpha \in [0,1), \\ e, & \text{if } \alpha = 1. \end{cases}$$

3228. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

For $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, prove that

$$\frac{(n+1)!}{2\prod\limits_{k=2}^{n}(k+\cos x)} \leq \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{n!}{\prod\limits_{k=2}^{n}(k+\cos x)}.$$

3229. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

(a) Let x and y be positive real numbers, and let n be a positive integer. Prove that

$$(x+y)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k} x^{n-k} y^k} \ \geq\ n+1+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{n-i} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+i}} \ \geq\ (n+1)^2 .$$

(b)★ Let x_1, x_2, $\dots$, x_k be positive real numbers, and let n be a positive integer. Determine the minimum value of

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_k=n \\ i_1,\,\dots,\,i_k\,\geq\,0}} \frac{i_1!i_2!\cdots i_k!}{n!x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_k^{i_k}} .$$

3230. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let a, x, and y be positive real numbers. Prove that

$$\begin{aligned}\left(x^{a+1}+x+y\right)\left(y^{a+1}+y+x\right)\left(x^{a+1}+(x^a+1)y\right)\left(y^{a+1}+(y^a+1)x\right)& \\ \geq\ (xy)^a\left(x+\sqrt{xy}+y\right)^4 &.\end{aligned}$$

3231★. *Proposed by Ignotus, Tauramena, Casanare, Colombia.*

(a) A flea lives on the real number line at the number 1. One fine day it decides to take an n–day vacation. On the first day it jumps forward one unit landing at the number 2. Thereafter, for the remaining $n-1$ days, it jumps forward a number of units of its choice, as long as the number of units is a proper divisor of the number it is currently visiting. A sample 11–day vacation is

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 20,\ 30,\ 45,\ 60.$$

What is the furthest away from home the flea can get during its n–day vacation? Note that the 11–day vacation above does not get the flea as far as possible; here is one that gets the flea further:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 27,\ 36,\ 54,\ 81.$$

(b) Suppose the flea wishes to visit, under the same rules as in (a), a certain number n. What is the least number, $V(n)$, of vacation days it will need to get there? For example, here is a scheme to get the flea to the number 100 in 13 days:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 27,\ 36,\ 54,\ 72,\ 96,\ 100.$$

3232. *Proposed by G. Tsintsifas, Thessaloniki, Greece.*

Let P be a point in the interior of $\angle QOR$. Find the segment AB of minimum length which contains P with A on the ray OQ and B on the ray OR.

3233. *Proposed by G. Tsintsifas, Thessaloniki, Greece.*

Let $A_1A_2A_3$ be a triangle, and let P be an interior point. The cevian A_iP intersects the opposite side at A_i' for $1 \le i \le 3$. If $[XYZ]$ denotes the area of triangle XYZ, set $\Delta_1 = [PA_2A_1']$, $\Delta_2 = [PA_3A_2']$, $\Delta_3 = [PA_1A_3']$, and $\Delta = [A_1A_2A_3]$. Find the locus of P if $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \frac{1}{2}\,\Delta$.

3234. *Proposed by G. Tsintsifas, Thessaloniki, Greece.*

Let ABC be an equilateral triangle, and let P be an interior point. The lines AP, BP, and CP intersect the opposite sides at the points A', B', and C', respectively. Determine the position of the point P if

$$AC' + CB' + BA' \;=\; A'C + C'B + B'A\,.$$

3235. *Proposed by Geoffrey A. Kandall, Hamden, CT, USA.*

Let ABC be a triangle, and let A_1, B_1, C_1 be points on the sides BC, CA, AB, respectively, such that

$$\frac{BA_1}{A_1C} \;=\; \frac{CB_1}{B_1A} \;=\; \frac{AC_1}{C_1B} \;=\; k\,.$$

Let $\alpha = AA_1$, $\beta = BB_1$, $\gamma = CC_1$, and $\lambda = \dfrac{k^2+k+1}{(k+1)^2}$. Prove that

(a) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \lambda(a^2+b^2+c^2)$;

(b) $\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = \lambda^2\bigl(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\bigr)$;

(c) $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = \lambda^2\bigl(a^4+b^4+c^4\bigr)$.

3236. *Proposed by Todor Mitev, University of Rousse, Rousse, Bulgaria.*

Let a, b, c be positive real numbers such that $abc = 1$. Prove that

$$a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \;\le\; 3+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\,.$$

3237. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Find all integers n such that

$$\frac{7n-12}{2^n}+\frac{2n-14}{3^n}+\frac{24n}{6^n} \;=\; 1\,.$$

3238. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let $\mathcal{T} = DBC$ be a triangle with $DB = DC$, and let A be a variable point in the interior of $\mathcal{T}$. The perpendiculars to BC through the mid-points of AB and AC meet DB and DC at P and Q, respectively. Find the locus of A for which P, A, and Q are collinear.

3226. *Proposé par Ovidiu Furdui, étudiant, Western Michigan University, Kalamazoo, MI, É-U.*

Soit un triangle ABC. Soit $S = \sum_{\text{cyclique}} \cos\frac{A}{2}$ et $P = \prod_{\text{cyclique}} \cos\frac{A}{2}$. Montrer que

(a) $\frac{S}{P} \le 2\sqrt{3}\max\left\{\sec\frac{A}{2},\ \sec\frac{B}{2},\ \sec\frac{C}{2}\right\}$;

(b) $\frac{S}{P} \ge 4\max\left\{\sec^2\frac{B-C}{4},\ \sec^2\frac{A-B}{4},\ \sec^2\frac{C-A}{4}\right\}$.

3227. *Proposé par Ovidiu Furdui, étudiant, Western Michigan University, Kalamazoo, MI, É-U.*

Soit $\alpha \in [0,1]$. On définit

$$x_n = \left(\frac{\zeta(2)+\cdots+\zeta(n+1)}{n}\right)^{n^\alpha},$$

où ζ est la fonction zéta de Riemann, defini par $\zeta(k) = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^k}$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha \in [0,1), \\ e, & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

3228. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Pour $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, montrer que

$$\frac{(n+1)!}{2\prod_{k=2}^{n}(k+\cos x)} \le \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{n-1} \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{n!}{\prod_{k=2}^{n}(k+\cos x)}.$$

3229. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

(a) Soit x et y deux nombres réels positifs, et soit n un entier positif. Montrer que

$$(x+y)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}x^{n-k}y^k} \ge n+1+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{n-i}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+i}} \ge (n+1)^2.$$

(b)★ Soit $x_1, x_2, \ldots, x_k$ k nombres réels positifs, et soit n un entier positif. Déterminer la valeur minimale de

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_k=n \\ i_1,\ldots,i_k \ge 0}} \frac{i_1!i_2!\cdots i_k!}{n!x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_k^{i_k}}.$$

3230. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit a, x et y trois nombres réels positifs. Montrer que

$$\left(x^{a+1}+x+y\right)\left(y^{a+1}+y+x\right)\left(x^{a+1}+(x^a+1)y\right)\left(y^{a+1}+(y^a+1)x\right) \geq (xy)^a\left(x+\sqrt{xy}+y\right)^4 .$$

3231★. *Proposé par Ignotus, Tauramena, Casanare, La Colombie.*

(a) On imagine une puce vivant sur la droite réelle au nombre 1. Un beau jour, elle décide de prendre n jours de vacances. Pour son premier jour, elle saute vers la droite pour se poser au nombre 2. Pour les $n-1$ jours suivants, elle continue à sauter vers la droite d'un nombre d'unités de son choix, pourvu que ce nombre d'unités soit un diviseur strict du nombre où elle séjourne présentement. Voici un exemple possible pour des vacances de 11 jours :

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 20,\ 30,\ 45,\ 60.$$

Quel est l'éloignement maximal que peut atteindre la puce pendant n jours de vacances ? Il faut noter que l'exemple ci-dessus ne répond pas à la question, car voici un meilleur choix, toujours pour 11 jours de vacances :

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 27,\ 36,\ 54,\ 81.$$

(b) Supposons que, aux mêmes conditions qu'en (a), la puce veuille visiter un certain nombre n. Quel est le plus petit nombre $V(n)$ de jours de vacances nécessaires pour qu'elle puisse s'y rendre ? Par exemple, voici le plan à suivre pour se rendre au nombre 100 en 13 jours :

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 27,\ 36,\ 54,\ 72,\ 96,\ 100.$$

3232. *Proposé par George Tsintsifas, Thessalonique, Grèce.*

Soit P un point intérieur de l'angle QOR. Trouver le segment AB, de longueur minimale, et qui contienne P, avec A sur le rayon OQ et B sur le rayon OR.

3233. *Proposé par George Tsintsifas, Thessalonique, Grèce.*

Soit P un point intérieur d'un triangle $A_1A_2A_3$. La cévienne A_iP coupe le côté opposé en A_i' pour $1 \leq i \leq 3$. Si $[XYZ]$ désigne l'aire du triangle XYZ, posons $\Delta_1 = [PA_2A_1']$, $\Delta_2 = [PA_3A_2']$, $\Delta_3 = [PA_1A_3']$ et $\Delta = [A_1A_2A_3]$. Trouver le lieu des points P tels que $\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3 = \frac{1}{2}\,\Delta$.

3234. *Proposé par George Tsintsifas, Thessalonique, Grèce.*

Soit P un point intérieur d'un triangle équilatéral ABC. Les droites AP, BP et CP coupent respectivement les côtés opposés aux points A', B' et C'. Déterminer la position du point P si on a

$$AC'+CB'+BA' = A'C+C'B+B'A .$$

3235. *Proposé par Geoffrey A. Kandall, Hamden, CT, É-U.*

Soit respectivement A_1, B_1 et C_1 des points sur les côtés BC, CA et AB d'un triangle ABC, de sorte que

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1}{C_1B} = k\,.$$

Soit $\alpha = AA_1$, $\beta = BB_1$, $\gamma = CC_1$ et $\lambda = \dfrac{k^2+k+1}{(k+1)^2}$. Montrer que

(a) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \lambda(a^2+b^2+c^2)$;

(b) $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2 = \lambda^2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$;

(c) $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4 = \lambda^2\left(a^4+b^4+c^4\right)$.

3236. *Proposé par Todor Mitev, Université de Rousse, Rousse, Bulgarie.*

Soit a, b et c trois nombres réels positifs tels que $abc = 1$. Montrer que

$$a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le 3+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\,.$$

3237. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Trouver tous les entiers n tels que

$$\frac{7n-12}{2^n}+\frac{2n-14}{3^n}+\frac{24n}{6^n} = 1\,.$$

3238. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit $\mathcal{T} = DBC$ un triangle avec $DB = DC$, et soit A un point variable dans l'intérieur de $\mathcal{T}$. Les perpendiculaires à BC passant par les milieux de AB et de AC coupent respectivement DB et DC en P et Q. Trouver le lieu de A pour lequel P, A et Q sont colinéaires.