Mayhem Solutions

M232. *Proposé par Nicholas Buck, College of New Caledonia, Prince George, CB, et John Grant McLoughlin, Université du Nouveau-Brunswick, Fredericton, NB.*

On peut recouvrir un échiquier standard de 8 lignes par 8 colonnes avec 32 dominos, chaque domino couvrant deux cases adjacentes. Supposons qu'on enlève au hasard deux cases. Si le nouvel échiquier obtenu ne peut plus être recouvert par 31 dominos, quelle est la probabilité pour que :

1. les deux cases enlevées soient dans la même ligne ?
2. les deux cases enlevées se touchent en un sommet (diagonalement, horizontalement ou verticalement) ?

Solution par Jean-David Houle, Cégep de Drummondville, Drummondville, QC.

Supposons, sans perte de généralité, que les cases de l'échiquier sont alternativement noires et blanches, comme celles d'un échiquier standard. On montre tout d'abord que le nouvel échiquier ne peut plus être recouvert par 31 dominos si et seulement si les deux cases retirées sont de la même couleur.

En effet, un domino recouvre deux cases adjacentes verticalement ou horizontalement, donc les deux cases sont toujours de couleurs différentes, soit une noire et une blanche. Si on recouvre l'échiquier par 31 dominos, il doit donc y avoir 31 cases blanches et 31 cases noires. Puisque l'échiquier original contient 32 cases de chaque couleur, les deux cases retirées doivent être de couleurs différentes. [*Réd :* De plus, si les deux cases retirées sont de couleurs différentes, elles sont aux coins opposés d'un rectangle de dimensions pair par impair et ce rectangle peut toujours être recouvert par des dominos. En séparant l'échiquier avec des tranches dans la direction de la dimension impaire du rectangle, on obtient des rectangles qui ont tous au moins une dimension paire et qui peuvent donc tous être recouverts avec des dominos.] Ceci indique que si on ne peut plus recouvrir l'échiquier par 31 dominos, les deux cases retirées sont de la même couleur.

1. Une ligne contient 4 cases de la même couleur, alors après avoir retiré la première case, il reste 3 cases de la même couleur sur la même ligne. Donc la probabilité est

$$\frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}} = \frac{3}{31} \approx 0,1935\,.$$

2. Deux cases qui se touchent en un sommet verticalement ou horizontalement sont nécessairement de couleurs différentes, donc les deux cases retirées se touchent diagonalement. On note que pour une couleur donnée,

18 cases ont 4 contacts diagonaux, 12 cases on 2 contacts diagonaux et 2 cases on un contact diagonal. Donc la probabilité est

$$\frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}} = \frac{18 \cdot 4 + 12 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{32 \cdot 31} = \frac{98}{992} \approx 0,0988\,.$$

Autre solution soumise par Richard I. Hess, Rancho Palos Verdes, CA, É-U.

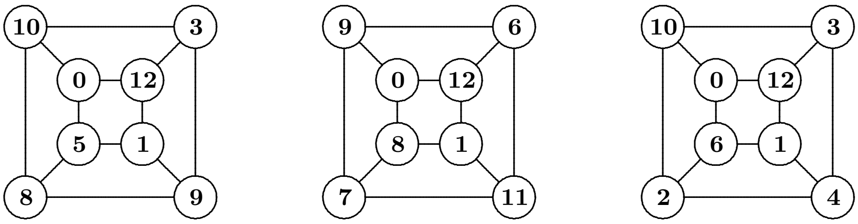
M233. *Proposed by Richard K. Guy, University of Calgary, Calgary, AB.*

Can you place eight distinct integers selected from 0 to 12 at the vertices of a cube so that the twelve edges have the differences $1, 2, \ldots, 12$ between their end-points?

Either find a way to do this, or prove that it is impossible.

Solution by the proposer, modified by the editor.

Since 12 is one of the differences, the numbers 0 and 12 must be on two adjacent vertices of the cube. Since 11 is another difference, either a vertex labelled 11 is adjacent to the vertex labelled 0 or a vertex labelled 1 is adjacent to the vertex labelled 12. However, these two possibilities are related by the mapping $f(n) = 12 - n$. Let us assume that a vertex labelled 1 is adjacent to the vertex labelled 12. Here are three such distinct cubes :



Also solved by Richard I. Hess, Rancho Palos Verdes, CA, USA. The proposer suspects that there may be as many as a dozen or more distinct solutions.

M234. *Proposé par K.R.S. Sastry, Bangalore, Inde.*

Soit J un nombre de deux chiffres sans communs diviseurs autres que 1. En permutant ces deux chiffres, on obtient un nombre I qui est $p\%$ plus grand que J. Trouver toutes les valeurs possibles de p, p étant un nombre naturel positif plus petit que 100.

Solution par Jean-David Houle, Cégep de Drummondville, Drummondville, QC, modifié par le rédacteur.

Soit $J = 10x+y$ où x et y sont des entiers entre 1 et 9, avec $(x, y) = 1$. Donc $I = 10y + x$. Aussi, $I = \left(1 + \frac{p}{100}\right) J$. En isolant p, on obtient :

$$p = 100 \cdot \frac{I - J}{J} = \frac{900(y - x)}{J}\,. \tag{1}$$

Puisque p est un nombre naturel, alors $y > x$ et $10x + y \mid 900(y - x)$.

Supposons que J et $y - x$ ont un diviseur commun plus grand que 1. Alors ils ont un diviseur principal commun q. Puisque $q \mid J = 10x + y$ et $q \mid y - x$, on a

$$q \mid (10x + y) - (y - x) \;=\; 11x\,.$$

Puisque $q < y - x \leq 9$, on obtient $q \mid x$. Donc $q \mid (y - x) + x = y$, qui est une contradiction, parce qu'ils n'ont aucun diviseur commun plus grand que 1. Ainsi, $(J, y - x) = 1$.

Donc $J \mid 900$. Les valeurs possibles pour J sont $\{12, 15, 18, 25, 45\}$. En remplaçant ces valeurs dans (1), on trouve $p \in \{75, 240, 350, 108, 20\}$. Puisque $p < 100$, on a $p = 20$ et $p = 75$.

En outre résolu par Michelle Ellenburg et Christopher Odom, étudiants, Angelo State University, San Angelo, TX, É-U ; et Richard I. Hess, Rancho Palos Verdes, CA, É-U.

M235. *Proposé par Ron Lancaster, Université de Toronto, Toronto, ON.*

Résoudre l'équation

$$2^x + 2^{x+1} + \cdots + 2^{x+2006} \;=\; 4^x + 4^{x+1} + \cdots + 4^{x+2006}\,.$$

Solution par Jean-David Houle, Cégep de Drummondville, Drummondville, QC.

On simplifie l'équation :

$$\begin{aligned} 2^x\left(1 + 2^1 + \cdots + 2^{2006}\right) &= 4^x\left(1 + 4^1 + \cdots + 4^{2006}\right)\,, \\ 1 + 2^1 + \cdots + 2^{2006} &= 2^x\left(1 + 4^1 + \cdots + 4^{2006}\right)\,. \end{aligned}$$

On remplace les séries géométriques par leur sommes :

$$\begin{aligned} 1 + 2^1 + \cdots + 2^{2006} &= \frac{1 - 2^{2007}}{1 - 2} = 2^{2007} - 1 \\ \text{et} \quad 1 + 4^1 + \cdots + 4^{2006} &= \frac{1 - 4^{2007}}{1 - 4} = \frac{4^{2007} - 1}{3}\,. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 1 + 2^1 + \cdots + 2^{2006} &= 2^x\left(1 + 4^1 + \cdots + 4^{2006}\right)\,, \\ 2^{2007} - 1 &= 2^x \cdot \frac{4^{2007} - 1}{3}\,, \\ 2^x \;=\; \frac{(3)(2^{2007} - 1)}{4^{2007} - 1} &= \frac{(3)(2^{2007} - 1)}{(2^{2007} + 1)(2^{2007} - 1)} \;=\; \frac{3}{2^{2007} + 1}\,. \end{aligned}$$

On peut en approximer le résultat :

$$x \;=\; \log_2\left(\frac{3}{2^{2007} + 1}\right) \;\approx\; \log_2\left(\frac{3}{2^{2007}}\right) \;=\; \log_2 3 - 2007 \;\approx\; -2005{,}415\,.$$

En outre résolu par RICHARD I. HESS, Rancho Palos Verdes, CA, É-U ; et JOSH TREJO et MANDY RODGERS, étudiants, Angelo State University, San Angelo, TX, É-U.

M236. *Proposed by Edward J. Barbeau, University of Toronto, Toronto, ON.*

A traveller to a strange island discovers that it is inhabited by knights who can only make true statements and knaves who can only make false statements. One day a traveller encountered three inhabitants, whom we will call A, B, and C, and asked, "How many knights are there among you three?"

A made an answer, which the traveller missed, but which was understood by the other two. When B was asked what A said, B responded, "A said that there is one knight among us."

"Don't believe B," exclaimed C, "he is lying."

What are B and C?

Solution by Mandy Rodgers and Josh Trejo, students, Angelo State University, San Angelo, TX, USA.

Since B and C made contradictory statements, they cannot both be knaves, or both knights. Thus, there are two cases to consider: B is a knight and C is a knave, or B is a knave and C is a knight.

Assume first that B is a knight and is telling the truth (and C is a knave). Then A really did say that there is one knight. Now, if A were a knight, his statement "There is one knight among us" would need to be true and would lead to a contradiction, since both A and B would be knights. If A were a knave, his statement "There is one knight among us" would need to be false, which would again lead to a contradiction, since B would be the one and only knight. Hence, B cannot be a knight.

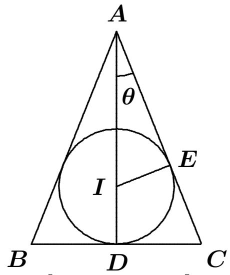
Therefore, B is a knave and is telling a lie (and C is a knight), which answers the question asked. We should explore this possibility to see if it can actually occur. Assume that B is a knave and C is a knight. Then A did not say that there is one knight. Now, if A were a knight, he could have said that there were 2 knights, which would be consistent, since both A and C would be knights. If A were a knave, he could have said they were all knights or all knaves. Thus, although it is not possible to determine whether A is a knight or a knave, we do know that B is a knave and C is a knight.

Also solved by JEAN-DAVID HOULE, Cégep de Drummondville, Drummondville, QC; and MICHELLE ELLENBURG and CHRISTOPHER ODOM, students, Angelo State University, San Angelo, TX, USA.

M237. *Proposed by K.R.S. Sastry, Bangalore, India.*

Let ABC be an isosceles triangle with $AB = AC$, and let the lengths of the sides be integers with no common divisor other than 1. The incentre I divides the internal angle bisector AD such that $\frac{AI}{ID} = \frac{25}{24}$. Determine the radius of the incircle of $\triangle ABC$.

Solved by Richard I. Hess, Rancho Palos Verdes, CA, USA.



Let a and b be relatively prime integers such that $a = BC$ and $b = AC = AB$, and let $\theta = \angle DAC$. We know that $\sin\theta = \frac{1}{2}a/b$ and $\sin\theta = IE/AI$. Since $IE = ID$, we conclude that

$$\sin\theta = \frac{a}{2b} = \frac{24}{25}.$$

Hence, since a and b are relatively prime, we have $a = 48$ and $b = 25$. Then $EC = DC = \frac{1}{2}a = 24$; thus, $AE = AC - EC = 1$. Now,

$$\begin{aligned} r &= IE = AE\tan\theta = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ &= \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{24/25}{7/25} = \frac{24}{7}. \end{aligned}$$

There was one incorrect solution submitted.