Mayhem Problems

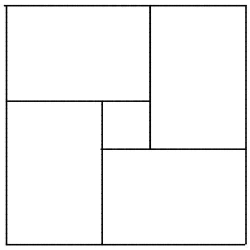
Veuillez nous transmettre vos solutions aux problèmes du présent numéro avant le **premier juillet 2007**. *Les solutions reçues après cette date ne seront prises en compte que s'il nous reste du temps avant la publication des solutions.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier et Martin Goldstein, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

M282. *Proposé par J. Walter Lynch, Athens, GA, USA.*

Quatre rectangles sont arrangés en un motif carré, de sorte qu'ils entourent un carré plus petit. Soit S l'aire du carré extérieur et Q celle du carré intérieur. Si $S/Q = 9 + 4\sqrt{5}$, déterminer le rapport des côtés des rectangles.



M283. *Proposé par Neven Jurič, Zagreb, Croatie.*

Trouver la relation entre x et y, si

$$x^2 + y\cos^2\alpha \;=\; x\sin\alpha\cos\alpha \qquad \text{et} \qquad x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha \;=\; 0\,.$$

(On suppose que x et y sont tous deux non nuls.)

M284. *Proposé par Bruce Shawyer, Université Memorial de Terre-Neuve, St. John's, NL.*

Montrer que

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right) \;=\; \frac{\pi}{4}\,.$$

M285. *Proposé par José Luis Díaz-Barrero, Université Polytechnique de Catalogne, Barcelone, Espagne.*

Soit a, b et c trois nombres strictement positifs tels que $a+b+c \geq 3abc$. Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2abc$.

M286. *Proposé par K.R.S. Sastry, Bangalore, Inde.*

Si $xy + yz + zx = 1$, montrer que

(a) $\dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{y}{1+y^2} + \dfrac{z}{1+z^2} \;=\; \dfrac{2}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}}$;

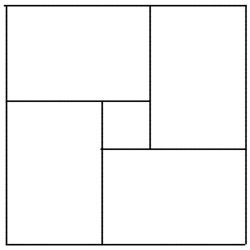
(b) $\dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{y}{1+y^2} + \dfrac{z}{1+z^2} \;=\; \dfrac{2}{x+y+z-xyz}$.

M287. *Proposé par Bruce Shawyer, Université Memorial de Terre-Neuve, St. John's, NL.*

Avec la règle et le compas, construire la moyenne harmonique de deux nombres réels donnés a et b.

....

M282. *Proposed by J. Walter Lynch, Athens, GA, USA.*



Four rectangles are arranged in a square pattern so that they enclose a smaller square. Let S be the area of the outer square and Q the area of the inner square. If $S/Q = 9 + 4\sqrt{5}$, determine the ratio of the sides of the rectangles.

M283. *Proposed by Neven Jurič, Zagreb, Croatia.*

Determine the relationship between x and y if

$$x^2 + y\cos^2\alpha \;=\; x\sin\alpha\cos\alpha \qquad \text{and} \qquad x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha \;=\; 0\,.$$

(Assume that both x and y are non-zero.)

M284. *Proposed by Bruce Shawyer, Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL.*

Prove that

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right) \;=\; \frac{\pi}{4}\,.$$

M285. *Proposed by José Luis Díaz-Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.*

Let a, b, and c be strictly positive numbers such that $a+b+c \geq 3abc$. Prove that $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2abc$.

M286. *Proposed by K.R.S. Sastry, Bangalore, India.*

If $xy + yz + zx = 1$, show that

(a) $$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \;=\; \frac{2}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}};$$

(b) $$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \;=\; \frac{2}{x+y+z-xyz}.$$

M287. *Proposed by Bruce Shawyer, Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL.*

Given two positive real numbers a and b, construct their harmonic mean with straightedge and compass.