Mayhem Problems

Veuillez nous transmettre vos solutions aux problèmes du présent numéro avant le **premier avril 2007**. *Les solutions reçues après cette date ne seront prises en compte que s'il nous reste du temps avant la publication des solutions.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais.

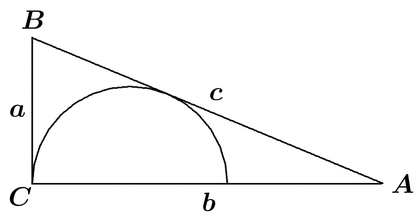
La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier et Martin Goldstein, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

M269. *Proposé par Bruce Shawyer, Université Memorial de Terre-Neuve, St. John's, NL.*

Dans le carré $ABCD$, soit E le point milieu du côté AD, soit F le point sur EB tel que CF soit perpendiculaire à EB, et soit G le point sur EB tel que AG soit perpendiculaire à EB. Montrer que $DF = CG$.

M270. *Proposé par Bruce Shawyer, Université Memorial de Terre-Neuve, St. John's, NL.*

Les côtés d'un triangle rectangle sont de longueur a et b, son hypoténuse est de longueur c. Un demi-cercle, ayant comme diamètre le côté de longueur b, est tangent aux deux autres côtés. Déterminer le rayon du demi-cercle en fonction de a, b et c.



M271. *Proposé par Yakub N. Aliyev, Université d'Etat de Bakou, Bakou, Azerbaïdjan.*

Sachant que dans un hexagone convexe $ABCDEF$, les côtés BC, DE et FA sont respectivement parallèles aux diagonales AD, CF et EB, on désigne respectivement par K, L et M les intersections des droites AB avec CD, CD avec EF, et EF avec AB ; on désigne enfin par P, Q et R les intersections respectives de CF avec BE, de BE avec AD, et de AD avec CF. Montrer que KP, MR et LQ se coupent en un même point.

M272. *Proposé par John Grant McLoughlin, Université du Nouveau-Brunswick, Fredericton, NB.*

Soit P un point situé sur le côté AB d'un parallélogramme $ABCD$. Sachant que le rapport de l'aire du triangle ABC et celle du quadrilatère $APCD$ est m/n, déterminer le rapport de AP et PB.

M273. *Proposé par John Grant McLoughlin, Université du Nouveau-Brunswick, Fredericton, NB.*

Soit A, B, C, D, E, F, G et H des lettres représentant des chiffres de 0 à 9, distincts. Déterminer leur valeur, sachant que les deux produits ci-dessous sont justes. (Noter que le premier chiffre d'un nombre doit être non nul.)

$$\begin{array}{r} ABCD \\ \times E \\ \hline DCBA \end{array} \qquad \begin{array}{r} BFDG \\ \times G \\ \hline GDFB \end{array}$$

M274. *Proposé par Neven Jurič, Zagreb, Croatie.*

Déterminer l'aire du polygone dont tous les sommets sont sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 100$, leurs coordonnées étant toutes des entiers.

M275. *Proposé par K.R.S. Sastry, Bangalore, Inde.*

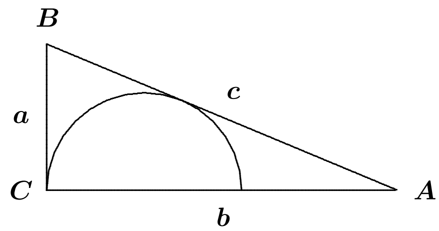
Un triangle pythagorique primitif (TPP en bref) est un triangle rectangle avec, comme longueurs des trois côtés, des entiers dont le plus grand commun diviseur est 1. Parmi les paires de TPPs non congruents possédant des cercles inscrits congruents à rayon entier, trouver une paire de rayon minimal.

M269. *Proposed by Bruce Shawyer, Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL.*

Let $ABCD$ be a square. Let E be the mid-point of the side AD, let F be the point on EB such that CF is perpendicular to EB, and let G be the point on EB such that AG is perpendicular to EB. Show that $DF = CG$.

M270. *Proposed by Bruce Shawyer, Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL.*

A right triangle has legs of lengths a and b and a hypotenuse of length c. A semicircle has its diameter on the side of length b and is tangent to the other two sides. Determine the radius of the semicircle in terms of a, b, and c.



M271. *Proposed by Yakub N. Aliyev, Baku State University, Baku, Azerbaijan.*

For the convex hexagon $ABCDEF$, it is known that the sides BC, DE, and FA are parallel to the diagonals AD, CF, and EB, respectively. We denote by K, L, and M the respective intersections of the lines AB with CD, CD with EF, and EF with AB; we further denote by P, Q, and R the respective intersections of CF with BE, BE with AD, and AD with CF. Prove that KP, MR, and LQ intersect at the same point.

M272. *Proposed by John Grant McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB.*

Let $ABCD$ be a parallelogram, and let P be a point situated on AB. If the ratio of the area of triangle ABC to that of quadrilateral $APCD$ is m/n, determine the ratio of AP to PB.

M273. *Proposed by John Grant McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB.*

The letters A, B, C, D, E, F, G, and H represent distinct digits. Determine their values given that the two products shown are true. (Note that the first digit of a number must be non-zero)

$$\begin{array}{r} ABCD \\ \times E \\ \hline DCBA \end{array} \qquad \begin{array}{r} BFDG \\ \times G \\ \hline GDFB \end{array}$$

M274. *Proposed by Neven Jurič, Zagreb, Croatia.*

Determine the area of the polygon whose vertices are all the points on the circle $x^2 + y^2 = 100$ where both coordinates are integers.

M275. *Proposed by K.R.S. Sastry, Bangalore, India.*

A primitive Pythagorean triangle (PPT) is a right triangle whose sides have lengths which are integers with a greatest common divisor of 1. Among all pairs of non-congruent PPTs which have congruent incircles with an integer radius, find a pair for which this radius is minimized.