PROBLEMS

Toutes solutions aux problèmes dans ce numéro doivent nous parvenir au plus tard le **1er juin 2007**. *Une étoile (⋆) après le numéro indique que le problème a été soumis sans solution.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais. Dans la section des solutions, le problème sera publié dans la langue de la principale solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier et Martin Goldstein, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

3135. Correction. *Proposé par Marian Marinescu, Monbonnot, France.*

Soit $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels non négatifs. Pour tout a, b et $c \in \mathbb{R}^+$, soit $H(a,b,c)$ l'ensemble de toutes les fonctions $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que

$$h(x) \ \geq \ h\big(h(ax)\big) + h(bx) + cx$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $H(a,b,c)$ est non vide si et seulement si $b \leq 1$ et $4ac \leq (1-b)^2$.

3188. *Proposé par José Luis Díaz-Barrero, Université Polytechnique de Catalogne, Barcelone, Espagne.*

Soit x, y et z des nombres réels positifs. Montrer que

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2 + \left(\frac{y}{z} + \frac{x}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2 + \left(\frac{z}{x} + \frac{y}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2 \ \geq \ 12\,.$$

3189. *Proposé par K.R.S. Sastry, Bangalore, Inde.*

Soit A le plus grand des trois angles du triangle ABC. Soit α la mesure de l'angle A, et soit respectivement h, w et m les longueurs de la hauteur, de la bissectrice intérieure et de la médiane, toutes mesurées de A jusqu'au côté BC.

(a) Déterminer l'aire du triangle ABC en fonction de α, h et w.

(b) Déterminer l'aire du triangle ABC en fonction de α, m et w.

[*Ed :* Le lecteur pourra consulter le problème M63 de Mayhem et sa solution [2003 : 427–428].]

3190. *Proposé par D.J. Smeenk, Zaltbommel, Pays-Bas.*

Soit A un point sur le cercle Γ, et soit P un point en dehors de Γ. Construire une droite ℓ par P coupant Γ en B et C de telle sorte que

$$2(BC) \ = \ AB + AC\,.$$

3191. *Proposé par D.J. Smeenk, Zaltbommel, Pays-Bas.*

Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC, soit AD la bissectrice interne de l'angle BAC avec D sur BC, et soit E le point où AD coupe Γ pour la seconde fois. Soit Γ' le cercle de diamètre AE, et soit F un point de Γ' tel que DF soit perpendiculaire à AE. Montrer que $EF = EC$.

3192. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit $k \in (0,1)$, et soit la suite $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ définie par $B_0 = k$, $B_1 = k^2$ et $B_{n+2} = kB_{n+1} + k^2B_n$ pour les n entiers non négatifs. Trouver $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{B_n}{n+1}$.

3193. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit le triangle ABC et A_1, B_1 et C_1 trois points sur les côtés respectifs BC, CA et AB, de sorte que

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = k\,,$$

où k est une constante positive. Soit H et H_1 les orthocentres respectifs des triangles ABC et $A_1B_1C_1$ avec O et O_1 les centres de leur cercle circonscrit respectif. Montrer que OO_1 est parallèle à HH_1.

3194. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit n un entier positif quelconque, et soit x_k, $y_k \in \mathbb{R}$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$. Montrer que

$$\min\left\{\sum_{k=1}^{n} x_k^2\,,\ \sum_{k=1}^{n} y_k^2\right\} \cdot \sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2 \ \geq \sum_{1\leq i<j\leq n} (x_iy_j - x_jy_i)^2\,.$$

3195. *Proposé par Vasile Cîrtoaje, Université de Ploiesti, Roumanie.*

(a) Soit $n \geq 3$ un nombre naturel. Montrer qu'il existe un nombre réel $q_n > 1$ tel que pour tous nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [1/q_n, q_n]$,

$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \cdots + \frac{a_n}{a_n+a_1} \geq \frac{n}{2}\,.$$

(b)★ Existe-t-il un nombre réel $q > 1$ tel que l'inégalité ci-dessus soit valide pour tout nombre naturel $n \geq 3$ et pour tous nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [1/q, q]$?

3196. *Proposé par Vasile Cîrtoaje, Université de Ploiesti, Roumanie.*

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n nombres réels positifs. Montrer que

$$\begin{aligned} &x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n + n(n-1)x_1x_2\cdots x_n \\ &\quad \geq\ x_1x_2\cdots x_n(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\,. \end{aligned}$$

3197. *Proposé par Paul Deiermann, Southeast Missouri State University, Cape Girardeau, MO, USA.*

Soit AB un segment de droite fixé. Parmi les triangles qui satisfont la condition $\angle AIO = \pi/2$, où I est le centre du cercle inscrit du triangle ABC et O celui de son cercle circonscrit, trouver le triangle d'aire maximale. Quelle est la valeur de celle-ci ?

3198. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit $ABCD$ un quadrilatère plan qui ne soit pas un parallélogramme. Soit C' et D' les projections orthogonales respectives des points C et D sur la droite AB. Les perpendiculaires de C sur AD et de D sur BC se coupent en P ; les perpendiculaires de C' sur AD et de D' sur BC se coupent en Q. Montrer que PQ est perpendiculaire à la droite passant par les milieux de AC et BD.

3199. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous les réels x et y, on a $f(xy) = f\big(f(x) + f(y)\big)$.

3200. *Proposé par Christopher J. Bradley, Bristol, GB.*

Soit ABC un triangle avec l'angle en B plus grand que l'angle en C, et soit E le centre du cercle exinscrit opposé à A. Soit respectivement M et N les points sur AB et AC, tels que EM soit la bissectrice intérieure de l'angle AEB et EN celle de l'angle AEC. Si l'on prolonge MN jusqu'à son intersection L avec BC, montrer qu'alors la somme des angles BEL et CEL vaut 180°.

3135. Correction. *Proposed by Marian Marinescu, Monbonnot, France.*

Let $\mathbb{R}^+$ be the set of non-negative real numbers. For all a, b, $c \in \mathbb{R}^+$, let $H(a,b,c)$ be the set of all functions $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ such that

$$h(x) \ \geq \ h\big(h(ax)\big) + h(bx) + cx$$

for all $x \in \mathbb{R}^+$. Prove that $H(a,b,c)$ is non-empty if and only if $b \leq 1$ and $4ac \leq (1-b)^2$.

3188. *Proposed by José Luis Díaz-Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.*

Let x, y, z be positive real numbers. Prove that

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2 + \left(\frac{y}{z} + \frac{x}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2 + \left(\frac{z}{x} + \frac{y}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2 \ \geq \ 12\,.$$

3189. *Proposed by K.R.S. Sastry, Bangalore, India.*

In $\triangle ABC$, let A be the largest of the three angles. Let α denote the measure of angle A, and let h, w, and m denote the lengths of the altitude, the internal angle bisector, and the median, all measured from A to the side BC.

(a) Determine the area of $\triangle ABC$ in terms of α, h, and w.

(b) Determine the area of $\triangle ABC$ in terms of α, m, and w.

[*Ed:* The reader may wish to look at Mayhem problem M63 and its solution [2003 : 427–428].]

3190. *Proposed by D.J. Smeenk, Zaltbommel, the Netherlands.*

Let A be a point on the circle Γ, and let P be a point outside Γ. Construct a line ℓ through P which intersects Γ at B and C such that

$$2(BC) = AB + AC .$$

3191. *Proposed by D.J. Smeenk, Zaltbommel, the Netherlands.*

Let Γ be the circumcircle of $\triangle ABC$, let AD be the internal angle bisector of $\angle BAC$ with D on BC, and let E be the point where AD meets Γ for the second time. Let Γ' be the circle with AE as diameter, and let F be a point of Γ' such that $DF \perp AE$. Prove that $EF = EC$.

3192. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let $k \in (0,1)$, and let the sequence $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ be defined by $B_0 = k$, $B_1 = k^2$, and $B_{n+2} = kB_{n+1} + k^2B_n$ for integers $n \geq 0$. Find $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{B_n}{n+1}$.

3193. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let ABC be a triangle, and let A_1, B_1, C_1 be on sides BC, CA, AB, respectively, such that

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = k ,$$

where k is a positive constant. Let H and H_1 be the orthocentres of $\triangle ABC$ and $\triangle A_1B_1C_1$, respectively, and let O and O_1 be their respective circumcentres. Prove that $OO_1 \parallel HH_1$.

3194. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let n be any positive integer, and let $x_k, y_k \in \mathbb{R}$ for $k = 1, 2, \ldots, n$. Prove that

$$\min\left\{\sum_{k=1}^{n} x_k^2 , \sum_{k=1}^{n} y_k^2\right\} \cdot \sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2 \geq \sum_{1\leq i<j\leq n} (x_iy_j - x_jy_i)^2 .$$

3195. *Proposed by Vasile Cîrtoaje, University of Ploiesti, Romania.*

(a) Let n be a natural number, $n \geq 3$. Prove that there is a real number $q_n > 1$ such that for any real numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [1/q_n, q_n]$,

$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \cdots + \frac{a_n}{a_n+a_1} \geq \frac{n}{2}.$$

(b)★ Does there exist a real number $q > 1$ such that the inequality in (a) holds for any natural number $n \geq 3$ and for any real numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [1/q, q]$?

3196. *Proposed by Vasile Cîrtoaje, University of Ploiesti, Romania.*

Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be positive real numbers. Prove that

$$\begin{aligned} & x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n + n(n-1)x_1x_2\cdots x_n \\ & \quad \geq \; x_1x_2\cdots x_n(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right). \end{aligned}$$

3197. *Proposed by Paul Deiermann, Southeast Missouri State University, Cape Girardeau, MO, USA.*

If AB is a fixed line segment, find the triangle ABC which has maximum area among those which satisfy $\angle AIO = \pi/2$, where I is the incentre of $\triangle ABC$ and O is its circumcentre. What is this maximum area?

3198. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let $ABCD$ be a planar quadrilateral which is not a parallelogram. Let C' and D' be the orthogonal projections onto the line AB of the points C and D, respectively. The perpendiculars from C to AD and from D to BC meet at P; the perpendiculars from C' to AD and from D' to BC meet at Q. Show that PQ is perpendicular to the line through the mid-points of AC and BD.

3199. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $f(xy) = f\big(f(x)+f(y)\big)$ for all real numbers x and y.

3200. *Proposed by Christopher J. Bradley, Bristol, UK.*

Let ABC be a triangle with $\angle B > \angle C$, and let E be the centre of the excircle opposite angle A. Let M and N be points on AB and AC, respectively, such that EM is the internal bisector of $\angle AEB$ and EN is the internal bisector of $\angle AEC$. If MN is extended to meet BC at L, prove that $\angle BEL + \angle CEL = 180^\circ$.