SKOLIAD No. 98

Robert Bilinski

The year 2006 is now at an end, and so is my second year as Skoliad Editor. A lot of things have happened in my life, not all of them happy. Thankfully, ***Crux Mathematicorum*** and my little part in it have brought me a joyful reprieve. Hence, I would like to thank you all.

In particular, I would like to thank Jim Totten, for his patience with my testing of the limits of the editing schedule, and the other editors of ***Crux Mathematicorum*** for their comments.

I also want to thank the contest providers for helping me have a "regular", but mostly an interesting and diversified, rotation of contests. Namely, my heartfelt thanks go out to: David Horrocks, Véronique Hussin, André Labelle, Clint Lee, John Grant McLoughlin, Warren Palmer, Ron Persky, and Don Rideout. My thanks go out not only for the help they bring to Skoliad, but also for the investment of time and energy they give to the promotion of mathematics in their neck-of-the-woods.

Lastly, I also thank our problem solvers (young and old, regular and new contributors) for solutions sent in during the past year. Thanks to Jean-François Désilets, Jean-David Houle, Vedula N. Murty, Khartik Natarajan, Carl O'Connor, Alex Remorov, Jia-Xi Sun, and Edward T.H. Wang.

I hope to see all of you in the coming year. Happy New Year!

Please send your solutions to the problems in this edition by ***1 June, 2007***. A copy of **MATHEMATICAL MAYHEM Vol. 8** will be presented to one pre-university reader who sends in solutions before the deadline. The decision of the editor is final.

Our questions this time come from the 2006 Maritime Mathematics Contest. Thanks go to David Horrocks from the University of Prince Edward Island and John Grant McLoughlin from the University of New Brunswick.

Concours de Mathématiques des Maritimes 2006

1. Après neuf heures, quelle est la prochaine heure à laquelle les aiguilles d'une horloge forment un angle droit ?

2. Pour un nombre positif comme $3,14$, on appelle 3 la *partie entière* et $0,14$ la *partie décimale*. Trouver un nombre positif tel que sa partie décimale, sa partie entière et le nombre lui-même sont trois termes consécutifs

(a) d'une suite arithmétique ; (b) d'une suite géométrique.

(Une suite a_1, a_2, a_3, a_4, $\dots$ est dite *arithmétique* si pour un certain nombre d, on a $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = d$; elle est dite *géométrique* si pour un certain nombre $r \neq 0$, on a $a_2/a_1 = a_3/a_2 = a_4/a_3 = \dots = r$.)

3. Une cuve rectangulaire de longueur 60 cm, de largeur 60 cm et de hauteur 40 cm est remplie d'eau jusqu'à une profondeur de 15 cm et repose sur une table horizontale. Soient A, B, C et D en ordre cyclique les quatre coins de la base de la cuve. On vide partiellement la cuve en soulevant lentement l'arête BC de sorte que la cuve pivote autour de l'arête AD. Quand l'angle que fait l'arête AB avec le plan de la table atteint 60°, on retourne la cuve à sa position originale. Quelle est maintenant la profondeur de l'eau dans la cuve ?

4. Écrivons les entiers positifs en spirale à droite. Où se situe le nombre 2006 relatif au nombre 1 ? (Par exemple, relatif à 1, le nombre 10 est situé une rangée plus haut et deux colonnes à la droite.)

7	8	9	10
6	1	2	11
5	4	3	12
	...	14	13

5. Il se peut pour une paire (x, y) d'entiers positifs que $x + y$ et xy soient tous les deux des carrés parfaits. Par exemple, $(5, 20)$ est une telle paire puisque $5 + 20 = 25$ et $5 \times 20 = 100$ sont des carrés parfaits. Montrer que le nombre 3 n'appartient à aucune telle paire.

6. Trouver toutes les valeurs réelles de x et y qui satisfont au système d'équations ci-dessous.

$$\begin{aligned} 2(x+y-2) &= y(x-y+2)\,, \\ x^2(y-1)+y^2(x-1) &= xy-1\,. \end{aligned}$$

2006 Maritime Mathematics Contest

1. At 9 o'clock, the hour and minute hands on a clock form a right angle. After 9 o'clock, what is the next time at which the clock hands form a right angle?

2. For a positive number such as 3.14, we call 3 the *integer part* and 0.14 the *fractional part*. Find a positive number such that the fractional part, the integer part, and the number itself are three consecutive terms

(a) in an arithmetic sequence; (b) in a geometric sequence.

(The sequence a_1, a_2, a_3, a_4, ... is called *arithmetic* if there is a number d such that $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = d$; it is called *geometric* if there is a number $r \neq 0$ such that $a_2/a_1 = a_3/a_2 = a_4/a_3 = \ldots = r$.)

3. A rectangular tank having length 60 cm, width 60 cm, and height 40 cm is filled with water to a depth of 15 cm and rests on a horizontal table. Let A, B, C, and D in cyclic order be the four bottom corners of the tank. Suppose that the edge BC is slowly raised so that the edge AD remains on the table. As water flows out, the tank is raised until the edge AB makes an angle of 60° with the table. The edge BC is then lowered until the tank once again rests on the table. At this point, what is the depth of water in the tank?

4. Suppose that the positive integers are written in a spiral as shown. Relative to the number 1, where does the number 2006 appear? (For example, 10 appears one unit up and two units to the right of 1.)

7	8	9	10
6	1	2	11
5	4	3	12
	...	14	13

5. A *square pair* is a pair (x, y) of positive integers such that $x+y$ and xy are both perfect squares. For example, $(5, 20)$ is a square pair since $5+20=25$ and $5\times 20=100$ are both perfect squares. Show that no square pair exists in which one of the numbers is 3.

6. Find all solutions in real numbers x and y for the system of equations:

$$\begin{aligned} 2(x+y-2) &= y(x-y+2)\,, \\ x^2(y-1)+y^2(x-1) &= xy-1\,. \end{aligned}$$

Next we give solutions to the Concours de l'Association Mathématique du Québec 2004 (niveau secondaire) [2006 : 130–133].

1. (Les vases d'eau salée.) Deux vases, A et B, d'une capacité de six litres chacun, contiennent chacun quatre litres d'eau salée, selon les concentrations suivantes : A contient 5% de sel et B contient 10% de sel. On vide un litre d'eau salée du vase A dans le vase B puis on mélange. On vide ensuite un litre du vase B dans le vase A, puis on mélange à nouveau. Quelle concentration de sel (en pourcentage) chacun des vases A et B contiennent-ils maintenant ?

[*Ed:* The English version of this was incorrectly stated. The first sentence should have read: "Two vases, A and B, each having a capacity of 6 litres, each contain 4 litres of salt-water solutions in the following concentrations: ..."]

Solution par Jean-David Houle, étudiant, Cégep de Drummondville, Drummondville, QC.

En versant 1 litre du vase A dans le vase B, on obtient 3 litres d'eau salée à 5% dans le vase A. Pour le vase B, on a

$$\begin{aligned} c_1v_1+c_2v_2 &= c_fv_f\,, \\ (5\%)(1L)+(10\%)(4L) &= c_f(5L)\,, \\ c_f &= \tfrac{1}{5}(5\%+40\%) \;=\; 9\%\,. \end{aligned}$$

Donc il y a 5 litres d'eau salée à 9% dans le vase B. Ensuite, on verse 1 litre du vase B dans le vase A pour obtenir 4 litres d'eau salée à 9% dans le vase B. Pour le vase A, on a

$$\begin{aligned} c_1v_1+c_2v_2 &= c_fv_f\,, \\ (9\%)(1L)+(5\%)(3L) &= c_f(4L)\,, \\ c_f &= \tfrac{1}{4}(9\%+15\%) \;=\; 6\%\,. \end{aligned}$$

Le résultat final est donc 6% de sel dans le vase A et 9% de sel dans le vase B.

Aussi solutionné par Alexander Remorov, étudiant, William Lyon Mackenzie Collegiate Institute, Toronto, ON.

Commentaire par Alexandre Remorov : On a $5\%(4) + 10\%(4) = 0,6$ *litres de sel au début ; à la fin, on a* $6\%(4) + 9\%(4) = 0,6$ *litres, la même qu'au début. On a donc une bonne manière de vérifier que nos calculs ont une bonne chance d'être bons.*

2. (La multiplication de Koallo.) Koallo habite le joli village d'Oloko, au Nigéria. Comme il aime les mathématiques, il a remarqué récemment, qu'avec une correspondance appropriée entre les chiffres et les lettres et en multipliant par 11 le nom de son village, il obtenait son nom ! Êtes-vous capable de faire comme lui ? Plus précisément, pouvez-vous trouver les chiffres différents que doivent représenter les lettres O, L, K et A pour que l'équation $OLOKO \times 11 = KOALLO$ soit vraie. Attention, $OLOKO$ doit être vu comme un nombre de cinq chiffres et non comme le produit $O \times L \times O \times K \times O$. Il en va de même pour $KOALLO$.

Solution officielle.

$$\begin{array}{r} O\ L\ O\ K\ O \\ +\ O\ L\ O\ K\ O\ \\ \hline K\ O\ A\ L\ L\ O \end{array}$$

En effectuant la multiplication de la façon usuelle, on obtient la somme illustrée à droite. On désignera les rangs des colonnes en commençant par la droite. La 6e colonne nous apprend que $K = O+1$ et que la 5e colonne génère une retenue. Sachant cela et examinant la 5e colonne, on déduit que $L = 9$ et que la 4e colonne génère une retenue et donc que $O = A + 1$. On a donc que les nombres A, O et K sont consécutifs.

Puisque $L = 9$, les 2e et 3e colonnes ne génèrent pas de retenues et on a $K + O = 9$. Cela nous donne $K = 5$, $O = 4$ et alors $A = 3$.

En somme, $(O, L, K, A) = (4, 9, 5, 3)$.

Aussi solutionné par Jean-David Houle, étudiant, Cégep de Drummondville, Drummondville, QC ; et Alexander Remorov, étudiant, William Lyon Mackenzie Collegiate Institute, Toronto, ON.

3. (Les nombres de Fibonacci dans des triangles de Pythagore.) La suite : 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... est la célèbre suite de Fibonacci. On voit que si on commence avec 1 et 2, les termes qui suivent sont toujours obtenus comme la somme des deux nombres précédents de la suite. Ainsi, par exemple, on a $3 = 2+1$, $5 = 3+2$, $8 = 5+3$. Un triangle de Pythagore est, quant à lui, un triangle rectangle dont la longueur de chacun des côtés est un nombre entier.

On remarque alors que si nous prenons quatre termes consécutifs de la suite de Fibonacci, quelques opérations simples nous permettent de former des triangles de Pythagore. Par exemple, soit les quatre nombres 3, 5, 8 et 13, alors un premier côté x du triangle est obtenu en prenant deux fois le produit des deux nombres du milieu ($x = 2 \times 5 \times 8 = 80$), le deuxième côté y est obtenu en multipliant le premier et le dernier des quatre nombres ($y = 3 \times 13 = 39$) et le dernier côté z est égal à la somme des carrés des deux nombres du milieu ($z = 5^2 + 8^2 = 89$). Ainsi, on a bien obtenu un triangle de Pythagore car on a $80^2 + 39^2 = 89^2$.

(a) Vérifiez que cela marche aussi si on prend les nombres 2, 3, 5 et 8.

(b) Pouvez-vous montrer que cela marche tout le temps ? Plus précisément, si a, b, c et d désignent quatre nombres consécutifs de la suite de Fibonacci et que l'on pose $x = 2bc$, $y = ad$ et $z = b^2 + c^2$, montrer que x, y et z forment les côtés entiers d'un triangle rectangle.

Solution identique par Jean-David Houle, étudiant, Cégep de Drummondville, Drummondville, QC ; et Alexander Remorov, étudiant, William Lyon Mackenzie Collegiate Institute, Toronto, ON.

(a) Avec les nombres 2, 3, 5 et 8, on obtient $x = 2 \times 3 \times 5 = 30$, $y = 2 \times 8 = 16$ et $z = 3^2 + 5^2 = 34$. Et on obtient bien un triangle de Pythagore car $30^2 + 16^2 = 34^2$.

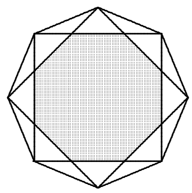
(b) Puisque a, b, c et d font parties de la suite de Fibonacci, on peut écrire $a = c - b$ et $d = b + c$. Ainsi, on a $x = 2bc$, $y = ad = c^2 - b^2$ et $z = b^2 + c^2$. Mais $x^2 + y^2 = (2bc)^2 + (c^2 - b^2)^2 = (c^2 + b^2)^2 = z^2$, ce qui prouve que x, y et z forment les côtés entiers d'un triangle rectangle.

4. (That figures!) Find the number of digits and the sum of the digits for the integer $16^8 \times 5^{30}$.

Identical solutions by Jean-David Houle, student, Cégep de Drummondville, Drummondville, QC and Alexander Remorov, student, William Lyon Mackenzie Collegiate Institute, Toronto, ON.

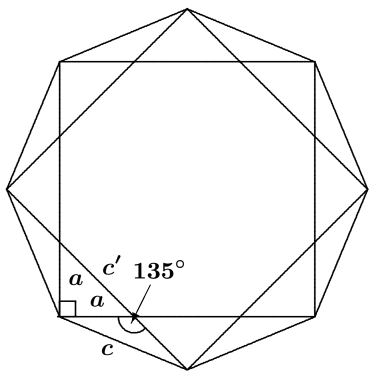
We observe that $16^8 \times 5^{30} = 2^{32} \times 5^{30} = 4 \times 10^{30}$. Hence, the product has 31 digits, namely a 4 and thirty 0s, which means they sum to 4.

5. (L'octogone.) Si on relie entre eux les sommets d'un octogone régulier qui ont un sommet voisin en commun, on obtient au centre de la figure un nouvel octogone régulier, décalé et plus petit que le premier (en gris sur le dessin). Si l'aire de l'octogone initial est 1, quelle est l'aire du nouvel octogone ?



Indice : lorsque deux figures sont semblables, le rapport de leurs aires est égal au carré du rapport de leurs côtés homologues.

Solution par Jean-David Houle, étudiant, Cégep de Drummondville, Drummondville, QC.



Puisque le grand octogone est régulier, alors chacun des angles intérieurs vaut $180° \times (8 - 2)/8 = 135°$. On note c la longueur d'un coté du grand octogone, c' le coté du petit octogone et a la longueur illustrée sur le dessin. Par Pythagore, on a $(c')^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, ou bien $c' = a\sqrt{2}$.

Soit A l'aire du petit octogone. Ainsi, puisque le petit et le grand octogone sont semblables, nous avons :

$$A = \frac{A}{1} = \left(\frac{c'}{c}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{c}\right)^2 = 2\left(\frac{a}{c}\right)^2 .$$

Par la loi des sinus, on trouve :

$$\frac{\sin(45^\circ/2)}{a} = \frac{\sin(135^\circ)}{c}, \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{a}{c} = \frac{\sin(45^\circ/2)}{\sin(135^\circ)} .$$

Ainsi on a

$$A = \frac{2\sin^2(45^\circ/2)}{\sin^2 135^\circ} = \frac{1-\cos 45^\circ}{\sin^2 135^\circ} = \frac{1-(1/\sqrt{2})}{(1/\sqrt{2})^2} = 2-\sqrt{2} .$$

Aussi solutionné par Alexander Remorov, étudiant, William Lyon Mackenzie Collegiate Institute, Toronto, ON.

6. (Presto . . . without calculators!) Explain why the following equality holds.

$$\frac{2004^2}{2003\times 2005} + \frac{2005^2}{2004\times 2006} + \cdots + \frac{3004^2}{3003\times 3005}$$
$$= 1001 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2003} + \tfrac{1}{2004} - \tfrac{1}{3004} - \tfrac{1}{3005}\right) .$$

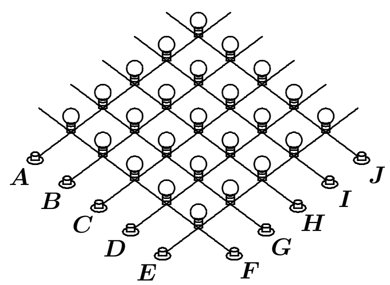
Hint: Decompose each of the terms $\frac{2004^2}{2003\times 2005}$, $\frac{2005^2}{2004\times 2006}$, etc. appropriately, then add them all.

Identical solutions by Jean-David Houle, student, Cégep de Drummondville, Drummondville, QC; and Alexander Remorov, student, William Lyon Mackenzie Collegiate Institute, Toronto, ON.

We have $\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)} = 1 + \dfrac{1}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}\right)$. Hence,

$$\begin{aligned}\sum_{n=2003}^{3003} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} &= 1001 + \frac{1}{2}\sum_{n=2003}^{3003}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\\ &= 1001 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2003} - \frac{1}{2005} + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2006} + \cdots + \frac{1}{3003} - \frac{1}{3005}\right)\\ &= 1001 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} - \frac{1}{3004} - \frac{1}{3005}\right) .\end{aligned}$$

7. (Les ampoules de Raoul.) Raoul se confectionne un circuit électrique formé de vingt-cinq ampoules disposées en carrés et de dix interrupteurs, notés de A à J, comme sur le dessin. S'il appuie sur un interrupteur, alors les cinq ampoules situées sur la ligne de cet interrupteur voient leur état inversé : celles qui sont allumées s'éteignent tandis que celles qui sont éteintes s'allument.



(a) Montrer que, quelque soit l'état initial des ampoules (certaines ampoules peuvent être allumées tandis que d'autres, non), il est toujours possible de manipuler les interrupteurs de telle sorte que, dans chacune des dix rangées correspondantes, il y ait toujours plus d'ampoules allumées qu'éteintes.

(b) Est-il toujours possible d'allumer toutes les ampoules en même temps ? Que votre réponse soit oui ou non, il faut donner la preuve de ce que vous avancez.

Solution par Jean-David Houle, étudiant, Cégep de Drummondville, Drummondville, QC.

(a) Si une ligne ne contient pas plus d'ampoules allumées que d'ampoules éteintes, et le nombre d'ampoules étant impair, alors appuyer sur l'interrupteur correspondant à cette ligne permettra d'obtenir plus d'ampoules allumées que d'ampoules éteintes. Ainsi, si on appuie sur l'interrupteur de chacune des lignes non-conformes, alors le nombre fini d'ampoules éteintes diminuera.

Puisque les interrupteurs sont indépendants, il n'y aura pas de situations en boucle, en ce sens que, si on répète le processus ci-dessus, alors on arrivera nécessairement à un instant où toutes les lignes contiendront plus d'ampoules allumées que d'ampoules éteintes.

(b) Si on appuie un nombre pair de fois sur un interrupteur, alors la situation de chacune des ampoules de cette ligne adopte son état initial. Si on appuie un nombre impair de fois sur un interrupteur, alors la situation de chacune des ampoules de cette ligne voit son état inversé.

De plus, l'ordre dans lequel on appuie sur les interrupteurs n'a aucune importance, car les interrupteurs sont indépendants les uns des autres. On en conclut donc que toutes les configurations d'ampoules possibles avec un tel système peuvent s'obtenir en appuyant au plus une fois sur chaque interrupteur.

Le nombre de configurations atteignables avec les interrupteurs est donc de 2^{10}. Par contre, le nombre de configurations possibles pour les ampoules est de 2^{25} (car il y a 25 ampoules).

On voit donc que, grâce aux interrupteurs, on ne peut pas accéder à tous les états possibles. Il n'est donc pas toujours possible d'allumer toutes les ampoules à partir de toutes les configurations initiales.

La partie (b) *a aussi été solutionné par Alexander Remorov, étudiant, William Lyon Mackenzie Collegiate Institute, Toronto, ON.*

That brings us to the end of another issue. This month's winners of a past Volume of Mayhem are Jean-David Houle, student, Cégep de Drummondville, Drummondville, QC and Alexander Remorov, student, William Lyon Mackenzie Collegiate Institute, Toronto, ON. Congratulations Jean-David and Alexander ! Continue sending in your contests and solutions.