Mayhem Problems

Veuillez nous transmettre vos solutions aux problèmes du présent numéro avant le **premier septembre 2006**. *Les solutions reçues après cette date ne seront prises en compte que s'il nous reste du temps avant la publication des solutions.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier et Martin Goldstein, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

M244. *Proposé par Mohammed Aassila, Strasbourg, France.*

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe, soit respectivement P, Q, R, S les points milieu de AB, BC, CD, DA. Supposons que quatre droites passant par P, Q, R, S se coupent en un point O. Dessiner quatre droites parallèles à ces dernières mais passant par les points milieu des côtés opposés. Montrer que ces quatre droites sont aussi concourantes.

M245. *Proposé par Ray Killgrove, Vista, CA, USA.*

Dans un triangle isocèle ABC avec $AB = AC$, les points D et E forment une trisection du troisième côté BC, c'est-à-dire $BD = DE = EC$. Pour de petits angles A, on dirait que les segments AD et AE forment une trisection de l'angle A. Montrer qu'au contraire, ce n'est jamais le cas.

M246. *Proposé par l'Équipe de Mayhem.*

Dix points sont donnés dans un plan de sorte qu'il n'y ait aucun sous-ensemble de trois points colinéaires. Quel est le nombre maximal de segments qu'il est possible de dessiner entre ces points de sorte qu'aucun triangle n'apparaisse dans la figure finale ?

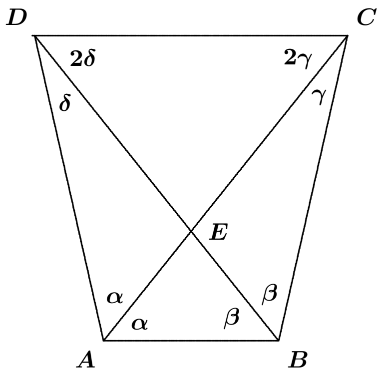
M247. *Proposé par Vedula N. Murty, Dover, PA, USA.*

Soit a, b et c trois nombres réels positifs avec $a + b + c = 1$. Sachant que $ab + bc + ca = \frac{1}{3}$, trouver les valeurs de :

(a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$, (b) $\frac{a}{b+1} + \frac{b}{c+1} + \frac{c}{a+1}$.

M248. *Proposé par K.R.S. Sastry, Bangalore, Inde.*

Dans le quadrilatère convexe $ABCD$, les diagonales AC et BD forment, d'après la figure, une bisection et une trisection les angles opposés.



(a) Trouver l'angle (aigu) entre AC et BD.

(b) Montrer que $\frac{\pi}{7} < \alpha < \frac{3\pi}{7}$.

M249. *Proposé par K.R.S. Sastry, Bangalore, Inde.*

Déterminer les nombres réels a, b, c et d sachant que les racines de l'équation $x^2 + ax - b = 0$ sont a et c, et que celles de l'équation $x^2 + cx + d = 0$ sont b et d.

M250. *Proposé par Vedula N. Murty, Dover, PA, USA.*

Soit $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels non négatifs satisfaisant $\sum_{i=1}^{n} x_i = n$. Soit $x_{n+1} = x_1$. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1} \leq n$ si $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, mais non nécessairement si $n \geq 5$.

. . . .

M244. *Proposed by Mohammed Aassila, Strasbourg, France.*

Let $ABCD$ be a convex quadrilateral, and let P, Q, R, S be the mid-points of AB, BC, CD, DA, respectively. Suppose that four distinct lines each passing through one of P, Q, R, S concur at a point O. Draw lines parallel to these four lines but passing through the mid-points of the opposite sides. Prove that these four lines are also concurrent.

M245. *Proposed by Ray Killgrove, Vista, CA, USA.*

Given isosceles triangle ABC with $AB = AC$, let the points D and E trisect the third side BC; that is, $BD = DE = EC$. For small angles A, it appears as if $\angle A$ is trisected by the segments AD and AE. Prove that, to the contrary, $\angle BAC$ is never trisected by the segments AD and AE.

M246. *Proposed by the Mayhem Staff.*

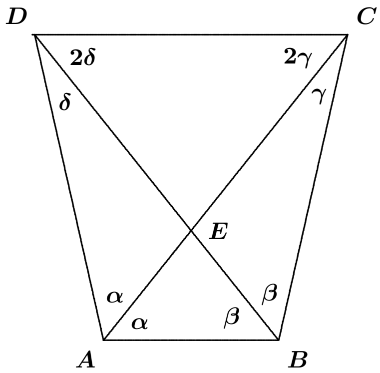
Ten points are arranged in a plane so that no three are collinear. What is the maximum number of segments that can be drawn joining two of the points such that no three of these points are all joined to form a triangle?

M247. *Proposed by Vedula N. Murty, Dover, PA, USA.*

Let a, b, c be positive real numbers with $a + b + c = 1$. Given that $ab + bc + ca = \frac{1}{3}$, find the values of:

(a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$, (b) $\frac{a}{b+1} + \frac{b}{c+1} + \frac{c}{a+1}$.

M248. *Proposed by K.R.S. Sastry, Bangalore, India.*



In the convex quadrilateral $ABCD$, the diagonals AC and BD bisect and trisect the opposite angles as shown.

(a) Find the (acute) angle between AC and BD.

(b) Show that $\frac{\pi}{7} < \alpha < \frac{3\pi}{7}$.

M249. *Proposed by K.R.S. Sastry, Bangalore, India.*

Determine the real numbers a, b, c, d given that the roots of the equation $x^2 + ax - b = 0$ are a and c, and the roots of the equation $x^2 + cx + d = 0$ are b and d.

M250. *Proposed by Vedula N. Murty, Dover, PA, USA.*

Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be non-negative real numbers satisfying $\sum_{i=1}^{n} x_i = n$. Let $x_{n+1} = x_1$. Show that $\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1} \leq n$ if $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, but not necessarily if $n \geq 5$.