SKOLIAD No. 94

Robert Bilinski

Please send your solutions to the problems in this edition by ***November 1, 2006***. A copy of **MATHEMATICAL MAYHEM Vol. 4** will be presented to one pre-university reader who sends in solutions before the deadline. The decision of the editor is final.

Our contest this month is the BC Colleges High School Mathematics Contest 2005, Senior Final Round, Part B. My thanks go to Clint Lee at Okanagan College.

BC Colleges High School Mathematics Contest 2005
Senior Final Round, Part B
Friday, May 6, 2005

1. The digits 1, 2, 3, 4, and 5 are each used once to compose a five-digit number $abcde$ such that the three-digit number abc is divisible by 4, bcd is divisible by 5, and cde is divisible by 3. Find the digit a.

2. An urn contains three white, six red, and four black balls.

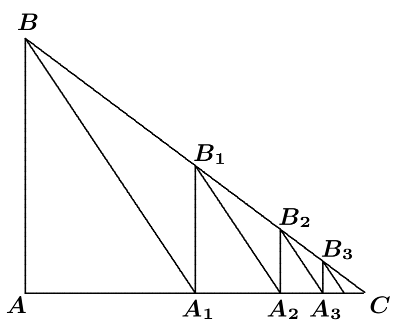
(a) If one ball is selected at random, what is the probability that the ball selected is red?

(b) If two balls are selected at random, what is the probability that they are both black?

(c) If two balls are selected at random, what is the probability that they are both black, given that they are the same colour?

3. In the diagram, ABC is a right-triangle with $\overline{AB} = 3$ and $\overline{AC} = 4$. Furthermore, each line segment A_iB_i is perpendicular to AC, A_1 bisects AC, and A_{i+1} bisects A_iC. Find the total length of the sequence of the diagonal segments:

$$\overline{BA_1} + \overline{B_1A_2} + \overline{B_2A_3} + \cdots$$



4. The equation

$$x^2 - 3x + q = 0$$

has two real roots, α and β. Knowing that $\alpha^3 + \beta^3 = 81$, find the value of q.

Hint: It is best not to use the quadratic formula.

5. A four-digit number which is a perfect square is created by writing Anne's age in years followed by Tom's age in years. Similarly, in 31 years, their ages in the same order will again form a four-digit perfect square. Determine the present ages of Anne and Tom.

Collèges de Colombie Britannique 2005
Concours Sénior de Mathématiques du Secondaire
Ronde Finale Partie B, Vendredi, 6 Mai 2005

1. Les chiffres 1, 2, 3, 4 et 5 sont tous utilisés une fois pour écrire un nombre à cinq chiffres $abcde$ tel que le nombre à trois chiffres abc est divisible par 4, bcd est divisible par 5, cde est divisible par 3. Quel est le chiffre a ?

2. Une urne contient trois boules blanches, six rouges et quatre noires.

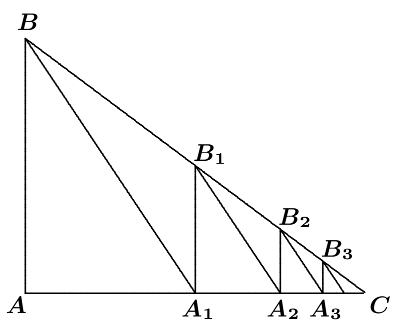
(a) Si une balle est choisie au hasard, quelle est la probabilité que la balle est rouge ?

(b) Si deux balles sont choisies au hasard, quelle est la probabilité qu'elles soient toutes les deux noires ?

(c) Si deux balles sont choisies au hasard, quelle est la probabilité qu'elles soient toutes les deux noires si elles sont de la même couleur ?

3. Dans le diagramme, ABC est un triangle rectangle avec $\overline{AB} = 3$ et $\overline{AC} = 4$. De plus, chaque segment A_iB_i est perpendiculaire à AC, A_1 coupe AC en deux, et A_{i+1} coupe A_iC en deux. Trouver la longueur totale de la sequence des segments diagonaux :

$$\overline{BA_1} + \overline{B_1A_2} + \overline{B_2A_3} + \cdots$$



4. L'équation

$$x^2 - 3x + q = 0$$

a deux racines réelles, α et β. Sachant que $\alpha^3 + \beta^3 = 81$, trouvez la valeur de q.

Indice : Il est mieux d'éviter la formule quadratique.

5. Un nombre à quatre chiffres qui est un carré parfait est créé en écrivant l'âge d'Anne en années suivi de l'âge à Tom en années. De la même manière, dans 31 ans, leurs âges dans le même ordre vont encore former un carré parfait à quatre chiffres. Determinez l'âge d'Anne et de Tom aujourd'hui.

Next we give the solutions to the 1999 New Zealand Junior Mathematics Competition [2005 : 417–420].

1999 New Zealand Junior Mathematics Competition
Sponsored by the University of Otago

1. Morris DuConfu multiplie les nombres à 2 chiffres en multipliant ensemble les chiffres des unités et des dizaines séparément puis en additionnant les résultats. On notera cette multiplication erronée par $(\times)$. Par exemple :

$$\begin{aligned} 36(\times)47 &= 42 + 12 = 54\,, \\ 23(\times)40 &= 0 + 8 = 8\,, \\ \text{et}\quad 65(\times)31 &= 5 + 18 = 23\,. \end{aligned}$$

Appelons cette opération le "Morris-produit".

(a) Que valent les Morris-produits $11(\times)18$, $91(\times)19$ et $35(\times)62$?

(b) Quel est le plus grand Morris-produit de 2 nombres à 2 chiffres ?

(c) Trouver tous les nombres à 2 chiffres ab tels que $32(\times)ab = 32$.

(d) Quel est le plus grand produit réel de 2 nombres à 2 chiffres dont le Morris-produit est inférieur à 10 ?

(a) *Solution par Carl O'Connor, étudiant, Collège Montmorency, Laval, QC.*

On a

$$11(\times)18 = 8 + 1 = 9\,,\ 91(\times)19 = 9 + 9 = 18 \text{ et } 35(\times)62 = 10 + 18 = 28.$$

(b) *Solution identique par Jean-François Désilets, étudiant, Collège Montmorency, Laval, QC; et Carl O'Connor, étudiant, Collège Montmorency, Laval, QC.*

Puisque le plus grand produit que l'on peut faire entre 2 chiffres est $9 \times 9 = 81$, le plus grand Morris-produit de 2 nombres à 2 chiffres est donc de $99(\times)99 = 81 + 81 = 162$.

(c) *Solution identique par Jean-François Désilets, étudiant, Collège Montmorency, Laval, QC; et Carl O'Connor, étudiant, Collège Montmorency, Laval, QC.*

On a $32(\times)ab = 2b + 3a = 32$. Puisque $2b$ est pair et que 32 est pair, $3a$ doit être pair aussi, donc a doit être pair. Il ne reste qu'à essayer tous les chiffres pairs pour a. On voit assez vite que seulement $a = 6$ et $a = 8$ sont valables et donnent respectivement $b = 7$ et $b = 4$.

Il y a donc deux solutions au problème, 67 et 84.

(d) *Solution par Carl O'Connor, étudiant, Collège Montmorency, Laval, QC.*

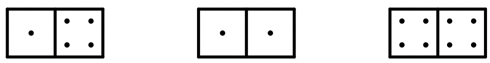
Prenons 2 nombres à 2 chiffres ab et cd et posons $ab > cd$ sans perdre de généralité. Leur Morris-produit est $ab(\times)cd = ac + bd < 10$, tandis que leur vrai produit est $100ac + 10ad + 10bc + bd$.

Pour avoir le plus grand produit possible tout en respectant la condition, il faut que $bd = 0$ et que $ac = 9$. Si $bd = 0$, alors $b = 0$ ou $d = 0$, alors $10ad = 0$ ou $10bc = 0$. Il est mieux de poser $b = 0$, car $a > c$ et il est donc mieux d'annuler c. Si $b = 0$, alors $d = 9$, car c'est sa plus grande valeur possible, donc la plus avantageuse. Puisque c est annulé par $b = 0$, il est mieux de lui donner la plus petite valeur possible pour augmenter celle de a puisque $ac = 9$. Nous avons donc $c = 1$, $a = 9$, $b = 0$ et $d = 9$.

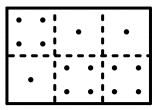
La réponse est donc $90(\times)19 = 0 + 9 = 9$ pour $90 \times 19 = 1710$.

Une solution erronée a été soumise pour (a). *La partie* (d) *a aussi été solutionnée par Jean-François Désilets, étudiant, Collège Montmorency, Laval, QC.*

2. S'ennuyant à la plage, Barbara arrange des dominos sur la table. Avec les années, quelques dominos ont été perdus à tel point qu'il n'en reste que trois. Notamment :



(a) Comment arranger les dominos pour obtenir le rectangle ?

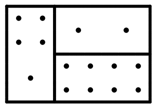


(b) Donner un exemple d'un rectangle similaire que l'on peut former exactement de 2 manières différentes avec ces trois dominos.

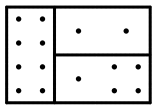
(c) Donner un exemple d'un rectangle similaire que l'on peut former exactement de 3 manières différentes avec ces trois dominos.

(d) Y a-t-il des rectangles que l'on peut former de 4 manières ?

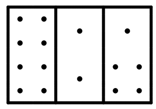
(a) *Solution identique par Jean-François Désilets, étudiant, Collège Montmorency, Laval, QC ; et Carl O'Connor, étudiant, Collège Montmorency, Laval, QC.*



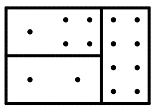
(b) *Solution identique à la réflexion près par Jean-François Désilets, étudiant, Collège Montmorency, Laval, QC ; et Carl O'Connor, étudiant, Collège Montmorency, Laval, QC.*



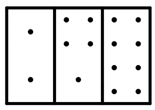
et



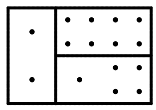
(c) *Solution identique à la réflexion près par Jean-François Désilets, étudiant, Collège Montmorency, Laval, QC ; et Carl O'Connor, étudiant, Collège Montmorency, Laval, QC.*



et



et



(d) *Solution par Jean-François Désilets, étudiant, Collège Montmorency, Laval, QC.*

Il n'y a aucun rectangle que l'on puisse former de plus que trois manières parce qu'il y a seulement trois configurations possibles de dominos.

La partie (d) *a aussi été solutionnée par Carl O'Connor, étudiant, Collège Montmorency, Laval, QC.*

3. Le pays magique de EnZed est formé des îles Nord et Sud. Les habitants de l'île nord ne disent jamais la vérité, alors que ceux du sud le font tout le temps. Sur l'île du sud, ils produisent une potion magique brune appelée Spites. Un voyageur assoiffé entra un jour dans une taverne à la recherche de cette potion. Sur le comptoir il trouva 3 verres pleins et 5 personnes assis autour du bar. Son intuition lui disait que seulement un des verres contenait de la potion, alors que les autres contenaient une imitation peu savoureuse. Sans surprise, chacune des personnes autour du bar ne fit qu'un commentaire :

Andy : Le verre de gauche contient du Spites.

Brenda : Le verre de droite contient du Spites.

Carol : Andy et Brenda ne sont pas de la même île.

Deirdre : Soit Andy est de l'île nord ou Brenda est de l'île sud.

Ed : Soit je suis de l'île nord, ou Carol et Deirdre sont de la même île.

(a) En se rappelant que pour les EnZediens (et pour les mathématiciens partout) une expression du type "Soit X ou Y" est vrai si soit X ou Y ou les deux sont vrais, que peut-on conclure du commentaire à Ed ?

(b) Quel verre (gauche, centre or droite) le voyageur devrait-il prendre ?

(a) *Solution identique par Jean-François Désilets, étudiant, Collège Montmorency, Laval, QC; et Carl O'Connor, étudiant, Collège Montmorency, Laval, QC.*

Ed ne peut pas venir du nord, car dire qu'il vient de l'île nord serait dire la vérité mais les gens du nord mentent toujours. Donc, il vient du sud et il dit la vérité, ce qui veut dire que Carol et Deirdre sont de la même île, car la première partie de sa déclaration est fausse.

(b) *Solution par Carl O'Connor, étudiant, Collège Montmorency, Laval, QC.*

Carol et Deirdre disent la vérité. Nous savons qu'ils sont de la même île, donc soit les deux mentent soit les deux disent la vérité. Si Carol ment, cela veut dire que Andy et Brenda sont de la même île. Or, si Deirdre ment, cela veut dire que Andy est du sud et que Brenda est du nord. Donc, les deux disent la vérité.

Comme on sait qu'ils ne sont pas de la même île, il faut que Andy soit du nord et que Brenda soit du sud, parce que l'inverse rendrait la déclaration de Deirdre fausse et que ce dernier dit la vérité.

Brenda dit donc la vérité et le voyageur doit prendre le verre de droite.

La partie (b) *a aussi été solutionnée par Jean-François Désilets, étudiant, Collège Montmorency, Laval, QC.*

4. Une assiette circulaire est divisée en 20 secteurs égaux. Dix secteurs sont peints en bleu, et dix en jaune. Montrez que quelque part sur l'assiette il doit y avoir dix secteurs consécutifs, cinq étant bleus et cinq jaunes (quelque soit la manière que l'on a fait pour choisir les secteurs).

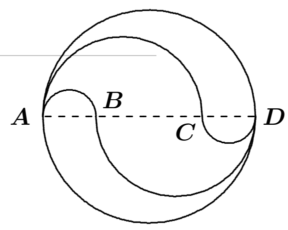
Solution par l'éditeur.

Supposons qu'il n'existe pas de telle suite. Choisissons un secteur comme étant s_1 et nommons-les en ordre jusqu'à s_{20}. Dans $(s_1, \ldots, s_{10})$, il n'y a pas 5 bleus et 5 jaunes. Il doit y en avoir plus de l'un que de l'autre. Par symétrie et sans perdre de généralité, supposons qu'il y a $n > 5$ bleus et $10 - n$ jaunes. Cela implique que dans $(s_{11}, \ldots, s_{20})$ c'est le contraire ($10 - n$ bleus et n jaunes).

Si on déplace maintenant l'intervalle que l'on étudie à $(s_2, \ldots, s_{11})$, ce que l'on fait en somme c'est remplacer s_1 par s_{11}. S'ils sont de la même couleur rien ne change à notre décompte. Par contre, s'ils sont de couleurs différentes, on passera soit à $n + 1$ bleus et $9 - n$ jaunes ou bien à $n - 1$ bleus et $11 - n$ jaunes. Mais en fait, ces 2 agencements de couleurs ont lieux en même temps car les secteurs que l'on n'étudie pas ont la répartition symétrique de celle que l'on étudie.

Compte tenu qu'à l'extérieur de notre main initiale, il y avait plus de jaunes que de bleus, on ne peut garder des mains "déséquilibrées" que pendant $\min\{n, 10-n\} = 10-n$ coups, ensuite, on devra piger le "surplus" de secteurs jaunes et retomber à 5 secteurs de chaque couleur.

5. Le roi Lear a l'intention de séparer sa fortune également parmi ses trois filles. Parmi ses possessions, on retrouve un large disque doré de 1m de diamètre. Pour des raisons esthétiques, il planifie que son forgeron le coupe en trois morceaux de même aire en utilisant des arcs semi-circulaires le long du diamètre AD comme sur le dessin (pas à l'échelle). Si AB et CD ont la même longueur, quelle devrait être cette longueur (exactement)?



(Le disque va être partagé selon les lignes pleines. La ligne en pointillés est seulement là pour indiquer le diamètre AD.)

Solution par Jean-François Désilets, étudiant, Collège Montmorency, Laval, QC.

Soit A_1 l'aire de la section inférieure, A_2 celle de la section centrale et A_3 celle de la section supérieure. Donc, on a $A_1 = A_2 = A_3$. Soit A_t l'aire totale du disque ; donc $A_t = \pi$.

$$\begin{aligned} A_1 &= \tfrac{1}{2}\pi AB^2 + \left(\tfrac{1}{2}\pi AD^2 - \tfrac{1}{2}\pi BD^2\right) \qquad (\text{où } AD^2 = 1^2 = 1) \\ &= \tfrac{1}{2}\pi AB^2 + \tfrac{1}{2}\pi\left[1 - (1-AB)^2\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\pi AB^2 + \tfrac{1}{2}\pi\left[1 - (1 - 2AB + AB^2)\right] \\ &= \pi AB\,. \end{aligned}$$

Mais $A_1 + A_2 + A_3 = 3A_1 = A_t = \pi$. Donc, $3A_1 = 3\pi AB = \pi$, ou $AB = \frac{1}{3}$.

Aussi solutionné par Carl O'Connor, étudiant, Collège Montmorency, Laval, QC.

That brings us to the end of another issue. This month's winners of a past volume of Mayhem are Carl O'Connor and Jean-François Désilets. Congratulations!

Continue sending in your contests and solutions.