Mayhem Problems

Please send your solutions to the problems in this edition by **1 June 2006**. *Solutions received after this date will only be considered if there is time before publication of the solutions.*

Each problem is given in English and French, the official languages of Canada. In issues 1, 3, 5, and 7, English will precede French, and in issues 2, 4, 6, and 8, French will precede English.

The editor thanks Jean-Marc Terrier and Martin Goldstein of the University of Montreal for translations of the problems.

M226. *Proposed by John Ciriani, Kamloops, BC.*

Antonino has a drawer full of identical black socks and identical white socks. If he were to select two socks at random from his drawer, the probability that they match would be $\frac{1}{2}$. How many of each colour of sock does Antonino have? (There is more than one answer.)

M227. *Proposed by Kenneth S. Williams, Carleton University, Ottawa, ON.*

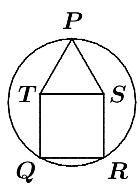
Let N be a positive integer such that N leaves a remainder of 2 or 4 when divided by 6 and there are integers x and y such that $N = x^2 + 27y^2$. Prove that there exist integers a and b with $N = a^2 + 3b^2$ where b is not divisible by 3.

M228. *Proposed by K.R.S. Sastry, Bangalore, India.*

(a) The zeros of the polynomial $P(x) = x^2 - 5x + 2$ are precisely the dimensions of a rectangle in centimetres. Determine the perimeter and the area of the rectangle.

(b) The zeros of the polynomial $P(x) = x^3 - 70x^2 + 1629x - 12600$ are precisely the inner dimensions of a rectangular room in metres. Find the total surface area and the volume of the interior of the room (when doors and windows are closed).

M229. *Proposed by Edward J. Barbeau, University of Toronto, Toronto, ON.*



An equilateral triangle sits atop a square as in the diagram. All sides have length 1. A circle passes through points P, Q and R. What is the radius of the circle?

M230. *Proposed by the Mayhem Staff.*

Al, Betty, Cecil, Dora, and Eugene are going to divide n coins among themselves knowing that:

1. Everyone receives at least one coin.
2. Al gets fewer coins than Betty, who gets fewer than Cecil, who gets fewer than Dora, who gets fewer than Eugene.
3. Each person knows only the total n and how many coins he or she got.

What is the smallest possible value of n such that nobody can deduce the number of coins received by each of the others without more information?

M231. *Proposed by Edward J. Barbeau, University of Toronto, Toronto, ON.*

Cordelia and Kent play the following game. Cordelia goes first and they take alternate turns. Each selects a number from 1 to 6 inclusive that has not already been selected; the game ends in six moves. At the end of each move, the player making the move takes the sum of all the numbers selected by either player up to that point and claims all of its positive divisors. When the game is over, the score of each player is the highest number k for which the player has claimed all the consecutive numbers $1, 2, 3, \dots, k$ from 1 to k inclusive. The winner is the player with the highest score; if both have the same score, neither wins and the game is a draw. For example, suppose the six moves are as follows: C:2; K:4; C:1; K:3; C:5; K:6. The respective claims by C are 1, 2; 1, 7; 1, 3, 5, 15; and by K are 1, 2, 3, 6; 1, 2, 5, 10; 1, 3, 7, 21. Cordelia and Kent have the same score, 3, and the game is a draw. The example does not demonstrate very good play. Is there any way that Cordelia can be prevented from winning assuming she is playing as an expert?

. . . .

M226. *Proposé par John Ciriani, Kamloops, BC.*

Antonino a un tiroir plein de chaussettes noires identiques et de chaussettes blanches identiques. S'il devait choisir deux chaussettes au hasard, la probabilité qu'elles soient de même couleur serait $\frac{1}{2}$. Combien de chaussettes de chaque couleur Antonino possède-t-il ? (Il y a plus d'une réponse.)

M227. *Proposé par Kenneth S. Williams, Université Carleton, Ottawa, ON.*

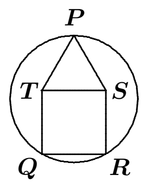
Soit N un nombre entier positif tel que N donne un reste de 2 ou 4 lorsque divisé par 6 et il y a des entiers x et y tels que $N = x^2 + 27y^2$. Montrer qu'il existe des entiers a et b avec $N = a^2 + 3b^2$ où b n'est pas divisible par 3.

M228. *Proposé par K.R.S. Sastry, Bangalore, Inde.*

(a) Les zéros du polynôme $P(x) = x^2 - 5x + 2$ donnent en centimètres les dimensions d'un rectangle. Déterminer le périmètre et l'aire du rectangle.

(b) Les zéros du polynôme $P(x) = x^3 - 70x^2 + 1629x - 12600$ donnent en mètres les dimensions intérieures d'une chambre rectangulaire. Trouver la surface totale et le volume de l'intérieur de la chambre (les portes et fenêtres étant fermées).

M229. *Proposé par Edward J. Barbeau, Université de Toronto, Toronto, ON.*



On dessine un triangle équilatéral à partir du côté supérieur d'un carré suivant la figure ci-contre. Tous les côtés sont de longueur 1. Si un cercle passe par les points P, Q et R, quel est son rayon ?

M230. *Proposé par l'Equipe de Mayhem.*

Alex, Berthe, Carole, Denise et Eugène se partagent n jetons de sorte que :

1. Chacun reçoît au moins un jeton.
2. Par ordre alphabétique, chacun en reçoît strictement moins que le suivant.
3. À part le total des n jetons, chaque personne ne connaît que le nombre de jetons qu'elle a reçus.

Quelle est la plus petite valeur possible de n de sorte que personne ne puisse en déduire, sans information supplémentaire, combien les autres ont reçu de jetons ?

M231. *Proposé par Edward J. Barbeau, Université de Toronto, Toronto, ON.*

Catherine et Patrick jouent le jeu suivant. On joue tour à tour et c'est Catherine qui commence. Chacun choisit un nombre, de 1 à 6 inclusivement, qui n'a pas encore été sélectionné ; le jeu s'arrête après six tours. À la fin de chaque tour, le joueur à qui c'est le tour fait la somme de tous les nombres choisis jusqu'ici par chacun des joueurs et marque tous les diviseurs positifs de celle-ci. À la fin du jeu, la marque de chaque jouer est le plus grand nombre k pour lequel le joueur a marqué tous les nombres consécutifs $1, 2, 3, \ldots, k$ de 1 à k inclusivement. Le gagnant est le joueur avec la plus haute marque ; il y a un match nul si les deux joueurs obtiennent la même marque. Par exemple, supposons que les six tours donnent : C :2 ; P :4 ; C :1 ; P :3 ; C :5 ; P :6. Les marques respectives de C sont 1, 2 ; 1, 7 ; 1, 3, 5, 15 ; et celles de P sont1, 2, 3, 6 ; 1, 2, 5, 10 ; et 1, 3, 7, 21. Catherine et Patrick ont la même marque, 3, et c'est match nul. Cet exemple ne représente pas la meilleure manière de jouer. Y a-t-il une manière d'empêcher Catherine de gagner en supposant qu'elle joue comme un expert ?