PROBLEMS

Solutions to problems in this issue should arrive no later than **1 September 2006**. *An asterisk* ($\star$) *after a number indicates that a problem was proposed without a solution.*

Each problem is given in English and French, the official languages of Canada. In issues 1, 3, 5, and 7, English will precede French, and in issues 2, 4, 6, and 8, French will precede English. In the solutions section, the problem will be stated in the language of the primary featured solution.

The editor thanks Jean-Marc Terrier and Martin Goldstein of the University of Montreal for translations of the problems.

3056. Correction. *Proposed by Paul Bracken, University of Texas, Edinburg, TX, USA.*

If $f(x)$ is a non-negative, continuous, concave function on the closed interval $[0,1]$ such that $f(0) = 1$, show that

$$2\int_0^1 x^2 f(x)\,dx + \frac{1}{12} \;\le\; \left[\int_0^1 f(x)\,dx\right]^2 .$$

3101. *Proposed by K.R.S. Sastry, Bangalore, India.*

The two distinct cevians AP and AQ of $\triangle ABC$ satisfy the equation $AQ^2 = AP^2 + |AC - AB|^2$.

(a) If $BP = CQ$, show that AP bisects $\angle BAC$.

(b)★ If AP bisects $\angle BAC$, prove or disprove that $BP = CQ$.

3102. *Proposed by D.J. Smeenk, Zaltbommel, the Netherlands.*

Let D be the mid-point of the side BC of $\triangle ABC$. Let E and F be the projections of B onto AC and C onto AB, respectively. Let P be the point of intersection of AD and EF. Show that, if $AD = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$, then P is the mid-point of AD.

3103. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let ABC be an acute-angled triangle with circumcentre O. Let the lines AO, BO, and CO meet the circles BCO, CAO, and ABO for the second time at A', B', and C', respectively. Let $|XYZ|$ denote the perimeter and $[XYZ]$ the area of the triangle XYZ. Prove that

(a) $\dfrac{BC}{|BCA'|} + \dfrac{CA}{|CAB'|} + \dfrac{AB}{|ABC'|} \;=\; 1$;

(b) $[BCO]\cdot[BCA'] + [CAO]\cdot[CAB'] + [ABO]\cdot[ABC'] \;=\; [ABC]^2$.

3104. *Proposed by D.J. Smeenk, Zaltbommel, the Netherlands.*

In $\triangle ABC$, let D, E, and F be the mid-points of the sides BC, CA, and AB, respectively. Show that, if $AD = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$, then $\angle BEC = \angle AFC$.

3105. *Proposed by Vasile Cîrtoaje, University of Ploiesti, Romania.*

Let a, b, c, d be positive real numbers.

(a) Prove that the following inequality holds for $0 \le x \le (5-\sqrt{17})/2$ and also for $x = 1$:

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{a}{a+(3-x)b+xc} \;\ge\; 1\,.$$

(b)★ Prove the above inequality for $0 \le x \le 1$.

3106. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Prove the following identities:

(a) $$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k+1} \frac{\binom{k}{i-1}^2\binom{2k}{k}}{2^{2k}\binom{2k}{2i-2}(2i-1)} \;=\; \frac{2^{2n+1}}{\binom{2n+1}{n}} - 2.$$

(b) $$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k+1} \frac{\binom{k}{i-1}^2\binom{2k}{k}}{2^{2k}\binom{2k}{2i-2}i} \;=\; \frac{(2n+3)\binom{2n+2}{n+1}}{2^{2n+1}} - 3.$$

3107. *Proposed by Victor Oxman, Western Galilee College, Israel.*

Let $A_1B_1C_1$ and $A_2B_2C_2$ be two triangles with $A_1C_1 = A_2C_2$. Suppose that the interior angle bisectors A_1D_1 and A_2D_2 are equal.

(a) If the altitudes B_1H_1 and B_2H_2 are equal, show that the triangles are congruent.

(b) If the interior angle bisectors B_1E_1 and B_2E_2 are equal, show that the triangles are congruent.

3108. *Proposed by Juan-Bosco Romero Márquez, Universidad de Valladolid, Valladolid, Spain.*

Let ABC be a triangle in which angles B and C are both acute. Let H be the point on side BC such that $AH \perp BC$. Let r, r_1, and r_2 be the incircles of triangles ABC, ABH, and AHC, respectively. Show that $r + r_1 + r_2 - AH$ is positive, negative, or zero according as $\angle A$ is obtuse, acute, or right-angled.

3109. *Proposed by Juan-Bosco Romero Márquez, Universidad de Valladolid, Valladolid, Spain.*

Let ABC be a triangle in which angles B and C are both acute, and let a, b, c be the lengths of the sides opposite the vertices A, B, C, respectively. If h_a is the altitude from A to BC, prove that $\frac{1}{h_a^2} - \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$ is positive, negative, or zero according as $\angle A$ is obtuse, acute, or right-angled.

3110. *Proposed by Juan-Bosco Romero Márquez, Universidad de Valladolid, Valladolid, Spain.*

Let m_b be the length of the median to side b in $\triangle ABC$, and define m_c similarly. Prove that $4a^4 + 9b^2c^2 - 16m_b^2m_c^2$ is positive, negative, or zero according as angle A is acute, obtuse, or right-angled.

3111. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let a_k, b_k, and c_k be the lengths of the sides opposite the vertices A_k, B_k, and C_k, respectively, in triangle $A_kB_kC_k$, for $k = 1, 2, \ldots, n$. If r_k is the inradius of triangle $A_kB_kC_k$ and if R_k is its circumradius, prove that

$$\begin{aligned} 6\sqrt{3}\left(\prod_{k=1}^{n} r_k\right)^{\frac{1}{n}} &\le \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n} c_k\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\le 3\sqrt{3}\left(\prod_{k=1}^{n} R_k\right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

3112★. *Proposed by Mohammed Aassila, Strasbourg, France.*

Let $MABC$ be a tetrahedron, and let M' be any point in the interior of $\triangle ABC$. Denote the area of $\triangle XYZ$ by $[XYZ]$. Prove that

$$\begin{aligned} (MM')^2 &= MA^2\,\frac{[BM'C]}{[ABC]} + MB^2\,\frac{[CM'A]}{[ABC]} + MC^2\,\frac{[AM'B]}{[ABC]} \\ &\quad - \left(AB^2\,\frac{[BM'C][CM'A]}{[ABC]^2} + BC^2\,\frac{[CM'A][AM'B]}{[ABC]^2}\right. \\ &\quad\quad \left. +\ CA^2\,\frac{[AM'B][BM'C]}{[ABC]^2}\right). \end{aligned}$$

Comment: This result for a tetrahedron is "similar" to Stewart's Theorem for a triangle. If $M' = G$, the centroid of $\triangle ABC$, then the relation becomes

$$MG^2 = \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2),$$

which is well known.

3113. *Proposed by Juan-Bosco Romero Márquez, Universidad de Valladolid, Valladolid, Spain.*

Let ABC be a triangle and let a be the length of the side opposite the vertex A. If m_a is the length of the median from A to BC, and if R is the circumradius of $\triangle ABC$, prove that $m_a - R$ is positive, negative, or zero, according as $\angle A$ is obtuse, acute, or right-angled.

. . . .

3056. Correction. *Proposé par Paul Bracken, Université du Texas, Edinburg, TX, USA.*

Si $f(x)$ est une fonction continue, concave et non négative sur l'intervalle fermé $[0,1]$ telle que $f(0) = 1$, montrer que

$$2\int_0^1 x^2 f(x)\,dx + \frac{1}{12} \;\leq\; \left[\int_0^1 f(x)\,dx\right]^2 .$$

3101. *Proposé par K.R.S. Sastry, Bangalore, Inde.*

Les deux céviennes distinctes AP et AQ d'un triangle ABC satisfont l'équation $AQ^2 = AP^2 + |AC - AB|^2$.

(a) Si $BP = CQ$, montrer que AP est une bissectrice de l'angle BAC.

(b)★ Si AP est une bissectrice de l'angle BAC, démontrer ou réfuter l'égalité $BP = CQ$.

3102. *Proposé par D.J. Smeenk, Zaltbommel, Pays-Bas.*

Soit D le point milieu du côté BC du triangle ABC. Soit respectivement E et F les projections de B sur AC et de C sur AB. Soit P le point d'intersection de AD et EF. Si $AD = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$, montrer que P est le point milieu de AD.

3103. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit ABC un triangle acutangle et O le centre du cercle circonscrit. Désignons respectivement par A', B' et C' les points où les droites AO, BO et CO coupent les cercles BCO, CAO et ABO pour la seconde fois. Si $|XYZ|$ dénote le périmètre du triangle XYZ et $[XYZ]$ son aire, montrer que

(a) $\dfrac{BC}{|BCA'|} + \dfrac{CA}{|CAB'|} + \dfrac{AB}{|ABC'|} \;=\; 1$;

(b) $[BCO]\cdot[BCA'] + [CAO]\cdot[CAB'] + [ABO]\cdot[ABC'] \;=\; [ABC]^2$.

3104. *Proposé par D.J. Smeenk, Zaltbommel, Pays-Bas.*

Soit respectivement D, E et F les points milieu des côtés BC, CA et AB du triangle ABC. Montrer que, si $AD = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$, alors $\angle BEC = \angle AFC$.

3105. *Proposé par Vasile Cîrtoaje, Université de Ploiesti, Roumanie.*

Soit a, b, c et d quatre nombres réels positifs.

(a) Montrer que, pour $0 \leq x \leq (5 - \sqrt{17})/2$ et pour $x = 1$, on a l'inégalité suivante :
$$\sum_{\text{cyclique}} \frac{a}{a + (3-x)b + xc} \geq 1 .$$

(b)★ Montrer l'inégalité ci-dessus pour $0 \leq x \leq 1$.

3106. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Établir les identités suivantes :

(a) $$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k+1} \frac{\binom{k}{i-1}^2\binom{2k}{k}}{2^{2k}\binom{2k}{2i-2}(2i-1)} = \frac{2^{2n+1}}{\binom{2n+1}{n}} - 2.$$

(b) $$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k+1} \frac{\binom{k}{i-1}^2\binom{2k}{k}}{2^{2k}\binom{2k}{2i-2}i} = \frac{(2n+3)\binom{2n+2}{n+1}}{2^{2n+1}} - 3.$$

3107. *Proposé par Victor Oxman, Western Galilee College, Israël.*

Soit $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ deux triangles tels que $A_1C_1 = A_2C_2$. Supposons que les bissectrices intérieures A_1D_1 et A_2D_2 sont égales.

(a) Si les hauteurs B_1H_1 et B_2H_2 sont égales, montrer que les triangles sont congruents.

(b) Si les bissectrices intérieures B_1E_1 et B_2E_2 sont égales, montrer que les triangles sont congruents.

3108. *Proposé par Juan-Bosco Romero Márquez, Université de Valladolid, Valladolid, Espagne.*

Soit ABC un triangle dont les deux angles B et C sont aigus. Soit H le point du côté BC tel que $AH \perp BC$. Désignons par r, r_1 et r_2 les rayons respectifs des cercles inscrits des triangles ABC, ABH et AHC. Montrer que $r + r_1 + r_2 - AH$ est positif, négatif ou nul suivant que $\angle A$ est obtus, aigu ou droit.

3109. *Proposé par Juan-Bosco Romero Márquez, Université de Valladolid, Valladolid, Espagne.*

Soit ABC un triangle dont les deux angles B et C sont aigus, et soit respectivement a, b et c les longueurs des côtés opposés aux sommets A, B et C. Si h_a est la hauteur de A à BC, montrer que $\frac{1}{h_a^2} - \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$ est positif, négatif ou nul suivant que $\angle A$ est obtus, aigu ou droit.

3110. *Proposé par Juan-Bosco Romero Márquez, Université de Valladolid, Valladolid, Espagne.*

Soit m_b la longueur de la médiane aboutissant sur le côté b du triangle ABC. On définit de même m_c. Montrer que $4a^4 + 9b^2c^2 - 16m_b^2m_c^2$ est positif, négatif ou nul suivant que l'angle A est aigu, obtus ou droit.

3111. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit a_k, b_k et c_k les longueurs respectives des côtés opposés aux sommets A_k, B_k et C_k du triangle $A_kB_kC_k$, pour $k = 1, 2, \ldots, n$. Si r_k est le rayon du cercle inscrit du triangle $A_kB_kC_k$ et si R_k est le rayon de son cercle circonscrit, montrer que

$$\begin{aligned} 6\sqrt{3}\left(\prod_{k=1}^{n} r_k\right)^{\frac{1}{n}} &\le \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n} c_k\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\le 3\sqrt{3}\left(\prod_{k=1}^{n} R_k\right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

3112★. *Proposé par Mohammed Aassila, Strasbourg, France.*

Soit $MABC$ un tétraèdre et soit M' un point intérieur quelconque du triangle ABC. Désigner l'aire du triangle XYZ par $[XYZ]$. Montrer que

$$\begin{aligned} (MM')^2 &= MA^2\,\frac{[BM'C]}{[ABC]} + MB^2\,\frac{[CM'A]}{[ABC]} + MC^2\,\frac{[AM'B]}{[ABC]} \\ &\quad - \left(AB^2\,\frac{[BM'C][CM'A]}{[ABC]^2} + BC^2\,\frac{[CM'A][AM'B]}{[ABC]^2}\right. \\ &\quad \left. + \; CA^2\,\frac{[AM'B][BM'C]}{[ABC]^2}\right). \end{aligned}$$

Commentaire : Ce résultat concernant un tétraèdre est "semblable" au théorème de Stewart pour un triangle. Si $M' = G$, le centre de gravité du triangle ABC, alors la relation devient

$$MG^2 = \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2),$$

qui est bien connue.

3113. *Proposé par Juan-Bosco Romero Márquez, Université de Valladolid, Valladolid, Espagne.*

Soit a la longueur du côté opposé au sommet A d'un triangle ABC. Si m_a est la longueur de la médiane de A à BC, et si R est le rayon du cercle circonscrit du triangle ABC, montrer que $m_a - R$ est positif, négatif ou nul suivant que $\angle A$ est obtus, aigu ou droit.