31: No 7 November / Novembre 2005

Published by:

Canadian Mathematical Society
Société mathématique du Canada
577 King Edward, POB/CP 450-A
Ottawa, ON K1N 6N5
Fax/Télec: 613 565 1539

SYNOPSIS

M213. *Proposed by Edward T.H. Wang, Wilfrid Laurier University, Waterloo, ON.*

Set $S = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\cdots(2^{1024}+1)+1$. Evaluate $S^{\frac{1}{1024}}$ without using a calculator.

M214. *Proposed by Babis Stergiou, Chalkida, Greece.*

Two equilateral triangles ABC and CDE are on the same side of line BCD. If BE intersects AC at K and DA intersects CE at L, prove that KL is parallel to BD.

M215. *Proposed by Bruce Shawyer, Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL.*

Find a rational number s such that s^2+5 and s^2-5 are both squares of rational numbers.

M216. *Proposed by K.R.S. Sastry, Bangalore, India.*

A Heron triangle has integer sides and area. Two sides of a Heron triangle are 442 and 649. If its area is 132396, find its perimeter.

M217. *Proposed by Bill Sands, University of Calgary, Calgary, AB.*

Let a, b, c be integers such that 2005 divides into both $ab + 9b + 81$ and $bc + 9c + 81$. Prove that 2005 also divides into $ca + 9a + 81$.

M218. *Proposed by Neven Jurič, Zagreb, Croatia.*

Compute the sum

$$\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}}\,.$$

M213. *Proposé par Edward T.H. Wang, Université Wilfrid Laurier, Waterloo, ON.*

Soit $S = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\cdots(2^{1024}+1)+1$. Calculer $S^{\frac{1}{1024}}$ sans l'aide d'une calculatrice.

M214. *Proposé par Babis Stergiou, Chalkida, Grèce.*

Deux triangles équilatéraux ABC et CDE sont du même côté de la droite BCD. Si BE coupe AC en K et DA coupe CE en L, montrer que KL est parallèle à BD.

M215. *Proposé par Bruce Shawyer, Université Memorial de Terre-Neuve, St. John's, NL.*

Trouver un nombre rationnel s tel que $s^2 + 5$ et $s^2 - 5$ sont tous deux des carrés de nombres rationnels.

M216. *Proposé par K.R.S. Sastry, Bangalore, Inde.*

Un triangle de Héron possède des côtés et une aire mesurés par des nombres entiers. Deux côtés d'un triangle de Héron mesurent 442 et 649. Si son aire est 132396, trouver son périmètre.

M217. *Proposé par Bill Sands, Université de Calgary, Calgary, AB.*

Soit a, b et c des entiers tels que 2005 soit divisible par $ab + 9b + 81$ et par $bc + 9c + 81$. Montrer que 2005 est aussi divisible par $ca + 9a + 81$.

M218. *Proposé par Neven Jurič, Zagreb, Croatie.*

Calculer la somme

$$\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}}\,.$$

3078. *Proposed by D.J. Smeenk, Zaltbommel, the Netherlands.*

Let ABC be a triangle with $a > b$. Let D be the foot of the altitude from A to the line BC, let E be the mid-point of AC, and let CF be an external bisector of $\angle BCA$ with F on the line AB. Suppose that D, E, F are collinear.

(a) Determine the range of $\angle BCA$.

(b) Show that $c > b$.

(c) If $c^2 = ab$, determine the measures of the angles of $\triangle ABC$, and show that $\sin B = \cos^2 B$.

3078. *Proposé par D.J. Smeenk, Zaltbommel, Pays-Bas.*

Soit ABC un triangle avec $a > b$. Soit D le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur la droite BC, soit E le point milieu de AC, et soit CF une bissectrice extérieure de l'angle BCA avec F sur la droite AB. Supposons que D, E et F sont colinéaires.

(a) Déterminer le domaine de variation de l'angle BCA.

(b) Montrer que $c > b$.

(c) Si $c^2 = ab$, trouver les mesures des angles du triangle ABC et montrer que $\sin B = \cos^2 B$.