PROBLEMS

Solutions to problems in this issue should arrive no later than **1 May 2006**. *An asterisk* ($\star$) *after a number indicates that a problem was proposed without a solution.*

Each problem is given in English and French, the official languages of Canada. In issues 1, 3, 5, and 7, English will precede French, and in issues 2, 4, 6, and 8, French will precede English. In the solutions section, the problem will be stated in the language of the primary featured solution.

The editor thanks Jean-Marc Terrier and Martin Goldstein of the University of Montreal for translations of the problems.

3076. *Proposed by Vedula N. Murty, Dover, PA, USA.*

If x, y, z are non-negative real numbers and a, b, c are arbitrary real numbers, prove that

$$\big(a(y+z)+b(z+x)+c(x+y)\big)^2 \;\geq\; 4(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)\,.$$

(Note: If we impose the conditions that $x+y+z=1$ and that a, b, c are positive, then the above is equivalent to

$$ax+by+cz+2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)} \;\leq\; a+b+c\,,$$

which is problem #8 of the 2001 Ukrainian Mathematical Olympiad, given in the December 2003 issue of ***CRUX with MAYHEM*** [2003 : 498]. The solution of the Ukrainian problem appears on page 443.)

3077. *Proposed by Arkady Alt, San Jose, CA, USA.*

In $\triangle ABC$, we denote the sides BC, CA, AB as usual by a, b, c, respectively. Let h_a, h_b, h_c be the lengths of the altitudes to the sides a, b, c, respectively. Let d_a, d_b, d_c be the signed distances from the circumcentre of $\triangle ABC$ to the sides a, b, c, respectively. (The distance d_a, for example, is positive if and only if the circumcentre and vertex A lie on the same side of the line BC.)

Prove that

$$\frac{h_a+h_b+h_c}{3} \;\leq\; d_a+d_b+d_c\,.$$

3078. *Proposed by D.J. Smeenk, Zaltbommel, the Netherlands.*

Let ABC be a triangle with $a>b$. Let D be the foot of the altitude from A to the line BC, let E be the mid-point of AC, and let CF be an external bisector of $\angle BCA$ with F on the line AB. Suppose that D, E, F are collinear.

(a) Determine the range of $\angle BCA$.

(b) Show that $c>b$.

(c) If $c^2=ab$, determine the measures of the angles of $\triangle ABC$, and show that $\sin B=\cos^2 B$.

3079. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let x_1, x_2, $\ldots$, x_n be real numbers such that $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. Prove that

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|\right)^4 \;\leq\; \frac{8(n-1)^2(n+1)(2n^2-3)}{15} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^4 \,.$$

3080. *Proposed by Christopher J. Bradley, Bristol, UK.*

Let ABC be a triangle, and let U and V be any two points in the plane of the triangle, but not on the sides of the triangle. Let $L = BU \cap CV$, $L' = BV \cap CU$, $M = CU \cap AV$, $M' = CV \cap AU$, $N = AU \cap BV$, $N' = AV \cap BU$. Prove that the triangles ABC, LMN are in perspective, as are triangles ABC, $L'M'N'$ and triangles LMN, $L'M'N'$. If the centres of these three perspectivities are P, P', P'', prove that P, P', P'' are collinear. Prove further that if U is the centroid G of $\triangle ABC$, then P'' is the mid-point of PP'.

[The proposer based this problem on an item he found in a century-old issue of the *Educational Times*, in which U and V are the centroid and the symmedian point of $\triangle ABC$. He verified that the result generalized to U and V being isogonal conjugates, and, using Cabri, he also found the result to be true for any two points in the plane of the triangle not on the sides. He adds "It is unlikely to be original, but is the sort of result that should not be lost to the world, and which solvers should enjoy."]

3081. *Proposed by Christopher J. Bradley, Bristol, UK.*

Let ABC be an acute-angled triangle and let the altitudes from A, B, C to the opposite sides have lengths d, e, f, respectively. The circle centred at A with radius d meets the line segments AB and AC at P and U, respectively, and it meets the rays BA and CA at P' and U', respectively. Similarly, we define the points Q, V, Q', V' using the circle centred at B with radius e, and we define the points R, W, R', W' using the circle centred at C with radius f (where Q, Q', W, W' lie on the line BC). Let A' be the intersection of PW and QU, let B' be the intersection of QU and RV, and let C' be the intersection of RV and PW. Further, let A'' be the intersection of $P'W'$ and $Q'U'$, B'' the intersection of $Q'U'$ and $R'V'$, and C'' the intersection of $R'V'$ and $P'W'$.

Prove that the triangles ABC, $A'B'C'$, and $A''B''C''$ have a common incentre.

3082. *Proposed by J. Walter Lynch, Athens, GA, USA.*

Suppose that four consecutive terms of a geometric sequence with common ratio r are the sides of a quadrilateral. What is the range of all possible values for r?

3083. *Proposed by Edward T.H. Wang and Kaiming Zhao, Wilfrid Laurier University, Waterloo, ON.*

Let n be a natural number, and suppose that the generalized Newton's binomial coefficient $\binom{\frac{1}{2}}{n}$ is written as a reduced fraction p/q where p and q are integers with $q > 0$. Show that $q = 2^k$ for some k with $0 \le k \le 2n-1$.

3084. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be real numbers satisfying

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \;=\; 0 \qquad \text{and} \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k^4 \;=\; 1\,.$$

Prove that

$$\left(\sum_{k=1}^{n} kx_k\right)^4 \;\le\; \frac{n^3(n^2-1)(3n^2-7)}{240}\,.$$

3085. *Proposed by Neven Jurič, Zagreb, Croatia.*

A *magic square of order* n is an $n \times n$ array containing the integers from 1 to n^2 such that the sum of the elements in each row, in each column, and on each of the two diagonals is the same.

Let $\mathfrak{M}$ be a magic square of odd order $n \ge 3$. Increase the values of all the entries in $\mathfrak{M}$ by $2n+2$ to get a new $n \times n$ array, say M_1. Place M_1 in the interior of an $(n+2) \times (n+2)$ array M'. Show that the border rows and columns of this can be filled in with the unused integers between 1 and $(n+2)^2$ to create a new magic square $\mathfrak{M}'$ of order $n+2$.

3086. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

If $a_k > 0$ for $k = 1, 2, \ldots, n$, prove that

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \;\ge\; \frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{\frac{a_1}{a_2}} + \sqrt[3]{\frac{a_2}{a_3}} + \cdots + \sqrt[3]{\frac{a_n}{a_1}}\right)^3 \;\ge\; n^2\,.$$

3087. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let ABC be a triangle with sides a, b, c opposite the angles A, B, C, respectively. If R is the circumradius and r the inradius of $\triangle ABC$, prove that:

(a) $\displaystyle \frac{3R}{r} \;\ge\; \frac{a+c}{b} + \frac{b+a}{c} + \frac{c+b}{a} \;\ge\; 6;$

(b) $\displaystyle \left(\frac{R}{r}\right)^3 \;\ge\; \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right) \;\ge\; 8.$

(Both (a) and (b) are refinements of Euler's Inequality, $R \ge 2r$.)

3076. *Proposé par Vedula N. Murty, Dover, PA, USA.*

Si x, y et z sont des nombres réels non négatifs et si a, b et c sont des nombres réels arbitraires, montrer que

$$\big(a(y+z)+b(z+x)+c(x+y)\big)^2 \;\geq\; 4(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)\,.$$

(Note : Si l'on impose les conditions que $x+y+z=1$ et que a, b et c sont positifs, alors l'inégalité ci-dessus est équivalente à

$$ax+by+cz+2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)} \;\leq\; a+b+c\,,$$

qui est en fait le problème #8 de l'Olympiade Mathématique d'Ukraine de 2001, paru dans le numéro de décembre 2003 de ***CRUX with MAYHEM*** [2003 : 498]. La solution du problème d'Ukraine est à la page 443.)

3077. *Proposé par Arkady Alt, San Jose, CA, USA.*

Dans le triangle ABC, on désigne les côtés BC, CA et AB respectivement par a, b et c. Soit h_a, h_b et h_c les longueurs des hauteurs respectives abaissées sur les côtés a, b et c. Soit d_a, d_b et d_c les distances respectives (affectées d'un signe) du centre du cercle circonscrit du triangle aux côtés a, b et c. (Par exemple, la distance d_a est positive si et seulement si ce centre et le sommet A sont situés du même côté de la droite BC.)

Montrer que

$$\frac{h_a+h_b+h_c}{3} \;\leq\; d_a+d_b+d_c\,.$$

3078. *Proposé par D.J. Smeenk, Zaltbommel, Pays-Bas.*

Soit ABC un triangle avec $a>b$. Soit D le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur la droite BC, soit E le point milieu de AC, et soit CF une bissectrice extérieure de l'angle BCA avec F sur la droite AB. Supposons que D, E et F sont colinéaires.

(a) Déterminer le domaine de variation de l'angle BCA.

(b) Montrer que $c>b$.

(c) Si $c^2=ab$, trouver les mesures des angles du triangle ABC et montrer que $\sin B=\cos^2 B$.

3079. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres réels tels que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. Montrer que

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^4 \;\leq\; \frac{8(n-1)^2(n+1)(2n^2-3)}{15}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^4\,.$$

3080. *Proposé par Christopher J. Bradley, Bristol, GB.*

Dans le plan, on considère le triangle ABC et deux points U et V non situés sur les côtés du triangle. Soit $L = BU \cap CV$, $L' = BV \cap CU$, $M = CU \cap AV$, $M' = CV \cap AU$, $N = AU \cap BV$, $N' = AV \cap BU$. Montrer que les triangles ABC, LMN sont en perspective, ainsi que les triangles ABC, $L'M'N'$ et les triangles LMN, $L'M'N'$. Si les centres de ces trois perspectivités sont P, P' et P'', montrer que P, P', P'' sont colinéaires. Montrer de plus que si U est le centre de gravité G du triangle ABC, alors P'' est le point milieu de PP'.

[Dans ce problème, le proposeur dit s'être inspiré d'un résultat paru dans un numéro centenaire du journal *Educational Times*, dans lequel U et V sont le centre de gravité et le symédian du triangle ABC. Il a vérifié que ce résultat se généralise au cas où U sont V sont des isogonales conjuguées et, à l'aide de Cabri, il a aussi trouvé que ce résultat demeure vrai pour deux points quelconques non situés sur les côtés du triangle. Il ajoute : "Il n'est peut-être pas original, mais il est de cette sorte de résultat qui, non seulement, ne devrait pas sombrer dans l'oubli, mais aussi faire la joie des solutionneurs."]

3081. *Proposé par Christopher J. Bradley, Bristol, GB.*

Soit ABC un triangle acuteangle et soit d, e et f les longueurs des hauteurs respectives issues des sommets A, B et C. Le cercle centré en A de rayon d coupe respectivement les segments AB et AC en P et U, et il coupe respectivement les rayons BA et CA en P' et U'. De manière analogue, on définit les points Q, V, Q', V' en utilisant le cercle centré en B de rayon e et on définit les points R, W, R', W' en utilisant le cercle centré en C de rayon f (où Q, Q', W, W' sont sur la droite BC). Soit A' l'intersection de PW et QU, soit B' celle de QU et RV, et soit C' celle de RV et PW. Finalement, soit A'' l'intersection de $P'W'$ et $Q'U'$, soit B'' celle de $Q'U'$ et $R'V'$, et soit C'' celle de $R'V'$ et $P'W'$.

Montrer que les triangles ABC, $A'B'C'$ et $A''B''C''$ ont même centre du cercle inscrit.

3082. *Proposé par J. Walter Lynch, Athens, GA, USA.*

On suppose que quatre termes consécutifs d'une suite géométrique de raison r sont les côtés d'un quadrilatère. Quelle est la gamme des valeurs possibles pour r ?

3083. *Proposé par Edward T.H. Wang et Kaiming Zhao, Université Wilfrid Laurier, Waterloo, ON.*

Soit n un nombre naturel, et supposons que le coefficient binomial généralisé de Newton $\binom{\frac{1}{2}}{n}$ est écrit sous la forme d'une fraction réduite p/q où p et q sont des entiers avec $q > 0$. Montrer que $q = 2^k$ pour un certain k avec $0 \leq k \leq 2n - 1$.

3084. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit x_1, x_2, $\ldots$, x_n des nombres réels satisfaisant

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \;=\; 0 \qquad \text{and} \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k^4 \;=\; 1\,.$$

Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} kx_k\right)^4 \;\le\; \frac{n^3(n^2-1)(3n^2-7)}{240}\,.$$

3085. *Proposé par Neven Jurič, Zagreb, Croatie.*

Un *carré magique d'ordre* n est un tableau $n \times n$ contenant les entiers de 1 à n^2 tel que la somme des éléments de chaque ligne, de chaque colonne et de chacune des deux diagonales soit la même.

Soit $\mathfrak{M}$ un carré magique d'ordre impair $n \ge 3$. On augmente la valeur de tous les éléments de $\mathfrak{M}$ de $2n+2$ pour obtenir un nouveau tableau $n \times n$, disons M_1. Insérer M_1 à l'intérieur d'un tableau $(n+2)\times(n+2)$, disons M'. Montrer que les lignes et les colonnes de M' peuvent être remplies avec les nombres entre 1 et $(n+2)^2$ non utilisés pour créer un nouveau carré magique $\mathfrak{M}'$ d'ordre $n+2$.

3086. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Si $a_k > 0$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$, montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \;\ge\; \frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{\frac{a_1}{a_2}} + \sqrt[3]{\frac{a_2}{a_3}} + \cdots + \sqrt[3]{\frac{a_n}{a_1}}\right)^3 \;\ge\; n^2\,.$$

3087. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit ABC un triangle de côtés a, b et c respectivement opposés aux sommets A, B et C. Si R est le rayon du cercle circonscrit au triangle et r celui de son cercle inscrit, montrer que :

(a) $\dfrac{3R}{r} \;\ge\; \dfrac{a+c}{b} + \dfrac{b+a}{c} + \dfrac{c+b}{a} \;\ge\; 6\,;$

(b) $\left(\dfrac{R}{r}\right)^3 \;\ge\; \left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\right)\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}\right) \;\ge\; 8.$

((a) et (b) sont toutes deux des raffinements de l'Inégalité d'Euler, $R \ge 2r$.)