PROBLEMS

Solutions to problems in this issue should arrive no later than **1 November 2005**. *An asterisk* ($\star$) *after a number indicates that a problem was proposed without a solution.*

Each problem is given in English and French, the official languages of Canada. In issues 1, 3, 5, and 7, English will precede French, and in issues 2, 4, 6, and 8, French will precede English. In the solutions section, the problem will be stated in the language of the primary featured solution.

The editor thanks Jean-Marc Terrier and Martin Goldstein of the University of Montreal for translations of the problems.

3007. Correction. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let ABC be a triangle, and let $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$ such that

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1}{C_1B} = k > 0\,.$$

1. Prove that the segments AA_1, BB_1, CC_1 are the sides of a triangle.

Let T_k denote this triangle. Let R_k and r_k be the circumradius and inradius of T_k. Prove that:

2. $P(T_k) < P(ABC)$, where $P(T)$ denotes the perimeter of triangle T;
3. $[T_k] = \dfrac{k^2+k+1}{(k+1)^2}[ABC]$, where $[T]$ denotes the area of triangle T;
4. $R_k \geq \dfrac{k\sqrt{k}\,P(ABC)}{(k+1)(k^2+k+1)}$;
5. $r_k > \dfrac{k^2+k+1}{(k+1)^2}\,r$, where r is the inradius of $\triangle ABC$.

3026. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let $a > 0$. Prove that

$$\frac{a^2+1}{e^a} + \frac{3a^2-1}{3e^{3a}} + \frac{5a^2+1}{5e^{5a}} + \frac{7a^2-1}{7e^{7a}} + \cdots < \frac{\pi}{4}\,.$$

3027. *Proposed by Geoffrey A. Kandall, Hamden, CT, USA.*

Let $ABCD$ be any quadrilateral, and let M be the mid-point of AB. On the sides CB, DC, and AD, equilateral triangles CBE, DCF, and ADG are constructed externally. Let N be the mid-point of EF and P be the mid-point of FG.

Prove that $\triangle MNP$ is equilateral.

3028. *Proposed by Dorin Mărghidanu, Colegiul Naţional "A.I. Cuza", Corabia, Romania.*

Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be positive real numbers, and let $S_k = 1+2+\cdots+k$. Prove the following

$$1+\frac{(a_1a_2^2)^{\frac{1}{S_2}}}{a_1+2a_2}+\frac{(a_1a_2^2a_3^3)^{\frac{1}{S_3}}}{a_1+2a_2+3a_3}+\cdots+\frac{(a_1a_2^2\cdots a_n^n)^{\frac{1}{S_n}}}{a_1+2a_2+\cdots+na_n} \;\leq\; \frac{2n}{n+1}\,.$$

3029. *Proposed by Dorin Mărghidanu, Colegiul Naţional "A.I. Cuza", Corabia, Romania.*

Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be real numbers greater than -1, and let α be any positive real number. Prove that if $a_1+a_2+\cdots+a_n \leq \alpha n$, then

$$\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_n+1} \;\geq\; \frac{n}{\alpha+1}\,.$$

3030. *Proposed by Dorin Mărghidanu, Colegiul Naţional "A.I. Cuza", Corabia, Romania.*

Show that, if $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are positive real numbers, then

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{(a_2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{3}{(a_3)^{\frac{1}{3}}}+\cdots+\frac{n}{(a_n)^{\frac{1}{n}}} \;\geq\; \frac{S_n}{(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{S_n}}}$$

where $S_n = 1+2+\cdots+n$.

3031. *Proposed by Neven Jurič, Zagreb, Croatia.*

A quadruple (a,b,c,d) of positive integers is said to have the *Diophantine property* if each of the six integers $ab+1$, $ac+1$, $ad+1$, $bc+1$, $bd+1$, $cd+1$ is a perfect square. For example, each of the following nine quadruples has the Diophantine property:

$$\begin{array}{lll}(3,5,16,1008), & (3,8,21,2080), & (3,16,33,6440),\\ (3,21,40,10208), & (3,33,56,22360), & (3,40,65,31416),\\ (3,56,85,57408), & (3,65,96,75208), & (3,85,120,122816).\end{array}$$

Find a general expression for the sequence of quadruples (a_n, b_n, c_n, d_n) which have the Diophantine property and for which the above examples represent the first terms.

3032. *Proposed by Vasile Cîrtoaje, University of Ploiesti, Romania.*

Let a, b, c be non-negative real numbers such that $a^2+b^2+c^2=1$. Prove that

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca} \;\leq\; \frac{9}{2}\,.$$

3033. *Proposed by Eckard Specht, Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany.*

Let I be the incentre of $\triangle ABC$, and let R and r be its circumradius and inradius, respectively. Prove that

$$6r \;\le\; AI+BI+CI \;\le\; \sqrt{12(R^2-Rr+r^2)}\,.$$

3034. *Proposed by Eckard Specht, Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany.*

Let a, b, c, x, y, z be positive real numbers. Prove that

$$\begin{aligned}&(bc+ca+ab)(yz+zx+xy)\\ &\quad\ge\; bcyz+cazx+abxy+2\sqrt{abcxyz(a+b+c)(x+y+z)}\,,\end{aligned}$$

and determine when equality occurs.

3035. *Proposed by Ali Feiz Mohammadi, student, University of Toronto, Toronto, ON.*

Are there infinitely many prime numbers that cannot be written as the sum of a prime number and a power of 2?

3036. *Proposed by Virgil Nicula, Bucharest, Romania.*

Let A, B, C be three distinct collinear fixed points. Let M be an arbitrary point not on the line ABC. The internal angle bisector of $\angle MAB$ intersects the line MB at a point X. The perpendicular at A to the line AX intersects the line MC at a point Y.

(a) Prove that the line XY passes through a fixed point D.

(b) Let Z be the projection of the point A onto the line XY. Prove that $\angle BZD=\angle CZD$.

3037. *Proposed by Ali Feiz Mohammadi, student, University of Toronto, Toronto, ON.*

There are 2005 senators in a senate. Each senator has enemies within the senate. Prove that there is a non-empty subset K of senators such that for every senator in the senate, the number of enemies of that senator in the set K is an even number.

3038. *Proposed by Virgil Nicula, Bucharest, Romania.*

Consider a triangle ABC in which $a=\max\{a,b,c\}$. Prove that the expressions $(a+b+c)\sqrt{2}-\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)\cdot\left(\sqrt{a+c}+\sqrt{a-c}\right)$ and $b^2+c^2-a^2$ have the same sign.

3007. Correction. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit ABC un triangle et soit $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$ et $C_1 \in AB$ tels que

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1}{C_1B} = k > 0\,.$$

1. Montrer que les segments AA_1, BB_1 et CC_1 sont les côtés d'un triangle.

Désignons par T_k ce triangle, par r_k et R_k le rayon des cercles inscrit et circonscrit de T_k. Montrer que

2. $P(T_k) < P(ABC)$, où $P(T)$ désigne le périmètre du triangle T;
3. $[T_k] = \dfrac{k^2+k+1}{(k+1)^2}[ABC]$, où $[T]$ désigne l'aire du triangle T;
4. $R_k \geq \dfrac{k\sqrt{k}\,P(ABC)}{(k+1)(k^2+k+1)}$;
5. $r_k > \dfrac{k^2+k+1}{(k+1)^2}\,r$, où r désigne le rayon du cercle inscrit de $\triangle ABC$.

3026. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit $a > 0$. Montrer que

$$\frac{a^2+1}{e^a} + \frac{3a^2-1}{3e^{3a}} + \frac{5a^2+1}{5e^{5a}} + \frac{7a^2-1}{7e^{7a}} + \cdots < \frac{\pi}{4}\,.$$

3027. *Proposé par Geoffrey A. Kandall, Hamden, CT, USA.*

Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque, et soit M le point milieu de AB. Sur les côtés CB, DC, and AD, on construit extérieurement les triangles équilatéraux CBE, DCF et ADG. Soit N le point milieu de EF et P le point milieu de FG.

Montrer que le triangle MNP est équilatéral.

3028. *Proposé par Dorin Mărghidanu, Colegiul Naţional "A.I. Cuza", Corabia, Roumanie.*

Soit $S_k = 1 + 2 + \cdots + k$, et soit a_1, a_2, …, a_n des nombres réels positifs. Montrer que

$$1 + \frac{(a_1a_2^2)^{\frac{1}{S_2}}}{a_1+2a_2} + \frac{(a_1a_2^2a_3^3)^{\frac{1}{S_3}}}{a_1+2a_2+3a_3} + \cdots + \frac{(a_1a_2^2\cdots a_n^n)^{\frac{1}{S_n}}}{a_1+2a_2+\cdots+na_n} \leq \frac{2n}{n+1}\,.$$

3029. *Proposé par Dorin Mărghidanu, Colegiul Naţional "A.I. Cuza", Corabia, Roumanie.*

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels plus grands que -1, et soit α un nombre réel positif quelconque. Si $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq \alpha n$, montrer que

$$\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \cdots + \frac{1}{a_n+1} \ \geq\ \frac{n}{\alpha+1}\,.$$

3030. *Proposé par Dorin Mărghidanu, Colegiul Naţional "A.I. Cuza", Corabia, Roumanie.*

Montrer que, si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres réels positifs, alors

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{(a_2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{(a_3)^{\frac{1}{3}}} + \cdots + \frac{n}{(a_n)^{\frac{1}{n}}} \ \geq\ \frac{S_n}{(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{S_n}}}$$

où $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$.

3031. *Proposé par Neven Jurič́, Zagreb, Croatie.*

On dit qu'un quadruplet (a,b,c,d) d'entiers positifs possède la *propriété diophantienne* si chacun des six entiers $ab+1$, $ac+1$, $ad+1$, $bc+1$, $bd+1$ et $cd+1$ est un carré parfait. Par exemple, chacun des neuf quadruplets suivants possède la propriété diophantienne :

$$\begin{array}{lll}
(3,5,16,1008), & (3,8,21,2080), & (3,16,33,6440), \\
(3,21,40,10208), & (3,33,56,22360), & (3,40,65,31416), \\
(3,56,85,57408), & (3,65,96,75208), & (3,85,120,122816).
\end{array}$$

Trouver une expression générale pour la suite de quadruplets (a_n, b_n, c_n, d_n) qui possèdent la propriété diophantienne et pour laquelle les exemples ci-dessus représentent les premiers termes.

3032. *Proposé par Vasile Cîrtoaje, Université de Ploiesti, Roumanie.*

Soit a, b et c des nombres réels non négatifs tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Montrer que

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \ \leq\ \frac{9}{2}\,.$$

3033. *Proposé par Eckard Specht, Université Otto-von-Guericke, Magdeburg, Allemagne.*

Soit I le centre et r le rayon du cercle inscrit du triangle ABC, et soit R le rayon du cercle circonscrit. Montrer que

$$6r \ \leq\ AI + BI + CI \ \leq\ \sqrt{12(R^2 - Rr + r^2)}\,.$$

3034. *Proposé par Eckard Specht, Université Otto-von-Guericke, Magdeburg, Allemagne.*

Soit a, b, c, x, y et z des nombres réels positifs. Montrer que

$$\begin{aligned}&(bc+ca+ab)(yz+zx+xy)\\&\quad\geq\quad bcyz+cazx+abxy+2\sqrt{abcxyz(a+b+c)(x+y+z)}\,,\end{aligned}$$

et trouver quand l'égalité a lieu.

3035. *Proposé par Ali Feiz Mohammadi, étudiant, Université de Toronto, Toronto, ON.*

Y-a-t'il un nombre infini de nombres premiers qu'on ne peut pas écrire comme une somme d'un nombre premier et d'une puissance de 2?

3036. *Proposé par Virgil Nicula, Bucarest, Roumanie.*

On donne trois points alignés distincts A, B et C . Soit M un point arbitraire non situé sur la droite ABC. La bissectrice de l'angle MAB coupe la droite MB en un point X. La perpendiculaire en A à la droite AX coupe la droite MC en un point Y.

(a) Montrer que la droite XY passe par un point fixe D.

(b) Soit Z la projection du point A sur la droite XY. Montrer que les angles BZD et CZD sont égaux.

3037. *Proposé par Ali Feiz Mohammadi, étudiant, Université de Toronto, Toronto, ON.*

Il y a 2005 sénateurs dans un sénat. Chaque sénateur a des ennemis à l'intérieur du sénat. Montrer qu'il y a un sous-ensemble non vide K de sénateurs tel que, pour chaque membre du sénat, le nombre d'ennemis de ce membre qui font partie de K est un nombre pair.

3038. *Proposé par Virgil Nicula, Bucarest, Roumanie.*

Soit ABC un triangle dans lequel $a=\max\{a,\,b,\,c\}$. Montrer que les expressions $(a+b+c)\sqrt{2}-\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)\cdot\left(\sqrt{a+c}+\sqrt{a-c}\right)$ et $b^2+c^2-a^2$ ont le même signe.