THE SKOLIAD CORNER

No. 45

R.E. Woodrow

This number we give the problems of the Kangourou Des Mathématiques, Épreuve EUROPÉENNE Cadets ($4^{\text{ième}}$-$3^{\text{ième}}$), written Friday, March 21, 1997. My thanks go to Richard Nowakowski, Canadian Team Leader to the IMO at Buenos Aires for collecting the contest questions and forwarding them to me. Readers should note that expressions such as $0,3$ would be 0.3 in English speaking countries.

KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES
Épreuve EUROPÉENNE Cadets ($4^{\text{ième}}$-$3^{\text{ième}}$)
Vendredi 21 mars 1997 — Durée : 1h 15

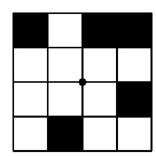
Les questions 1 à 10 valent 3 points chacune.

1. L'année dernière, 1 100 000 jeunes de 22 pays ont participé au concours Kangourou. Combien de milliers de participants y a-t-il eu à ce Kangourou ?

(a) 110 **(b)** 1010 **(c)** 1100 **(d)** 1001 **(e)** 11 000

2. Quel nombre minimum de petits carrés faut-il noircir pour que le grand carré ait un centre de symétrie ?

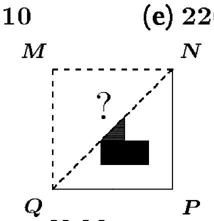
(a) 1 **(b)** 2 **(c)** 3 **(d)** 4 **(e)** 5

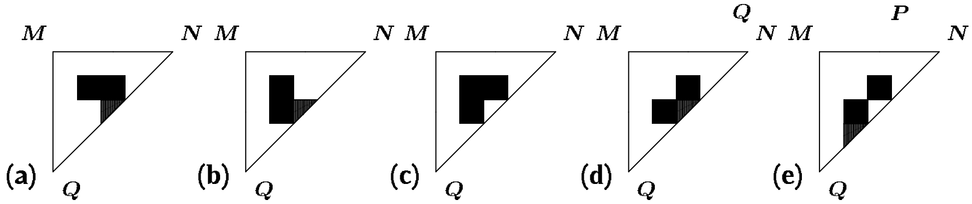


3. Au Kangouland, il y a eu, en 1996, 100 000 participants au concours Kangourou. Le nombre de participants au concours y double chaque année. À partir de quelle année dépassera-t-on le million de participants au Kangouland ?

(a) 1998 **(b)** 1999 **(c)** 2000 **(d)** 2010 **(e)** 2200

4. Quel triangle MNQ faut-il choisir pour que la diagonale $[NQ]$ soit axe de symétrie de la figure obtenue ?



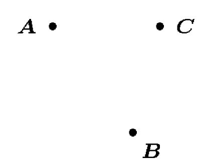


5. Christophe saute du plongeoir. Il s'élève d'un mètre en l'air, redescend de cinq mètres puis effectue une remontée de deux mètres pour atteindre la surface.

À quelle hauteur au-dessus de l'eau se trouve le plongeoir ?

(a) 1 m **(b)** 2 m **(c)** 3 m **(d)** 4 m **(e)** le plongeoir est sous l'eau

6. A, B et C sont trois points. On veut ajouter un quatrième point de façon à ce que les quatre points soient les sommets d'un parallélogramme. Combien de points conviennent ?



(a) 1 **(b)** 2 **(c)** 3 **(d)** 4 **(e)** 6

7. Le ticket d'entrée au *Palais des Sciences* coûte 50 centimes pour les enfants et 1 franc pour les adultes. Dimanche dernier, 50 personnes ont visité le Palais et la recette totale a été de 35 francs. Combien y avait-il d'adultes parmi les visiteurs ?

(a) 18 **(b)** 20 **(c)** 25 **(d)** 40 **(e)** 45

8. Quel est le quotient de 111 111 111 par 9 ?

(a) 99 **(b)** 12345678 **(c)** 12312312 **(d)** 1111111 **(e)** 12345679

9. Marie a 5 stylos. Michel a moins de stylos que Marie. Et leur petite sœur a autant de stylos à elle toute seule qu'eux deux réunis. À eux trois, ils peuvent avoir :

(a) 8 stylos **(b)** 11 stylos **(c)** 13 stylos **(d)** 14 stylos **(e)** 20 stylos

10. Ce matin, Laura, en faisant sa toilette, aperçoit dans le miroir les aiguilles de la pendule placée derrière elle. "Tiens", dit-elle, "la pendule est arrêtée : elle marque quatre heures moins cinq." Laura se trompe ! Quelle heure est-il en réalité ?

(a) 8h 05 **(b)** 4h 55 **(c)** 7h 55 **(d)** 8h 55 **(e)** 4h 05

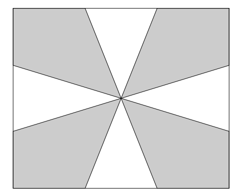
Les questions 11 à 20 valent 4 points chacune.

11. Parmi les nombres proposés, quel est le plus proche du nombre

$$\frac{21 \times 0,3 \times 1997}{10\ 000} \ ?$$

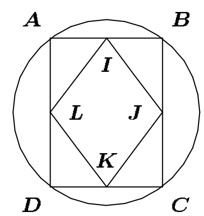
(a) $0,001$ **(b)** $0,01$ **(c)** $0,1$ **(d)** 1 **(e)** 10

12. Chaque côté d'un rectangle est divisé en trois segments de même longueur ; les points obtenus sont reliés de manière à obtenir le drapeau ci-contre. Combien vaut le quotient de l'aire de la partie blanche par celle de la partie grisée ?



(a) 1 **(b)** $\frac{1}{2}$ **(c)** $\frac{1}{3}$ **(d)** $\frac{1}{4}$ **(e)** $\frac{2}{3}$

13. Dans un cercle de rayon 3 cm, on a inscrit un rectangle $ABCD$. Soient I, J, K et L les milieux de ses côtés. Quel est, en centimètres, le périmètre du losange $IJKL$?

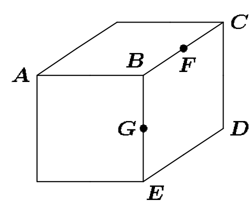


(a) 6 **(b)** 9 **(c)** 12 **(d)** $4\sqrt{3}$ **(e)** cela dépend du rectangle

14. Papa a acheté des fruits : des pommes, des poires, des bananes et des oranges. Il a 44 fruits dans son panier. Il y a 2 pommes de plus que de poires. Il y a 8 poires de plus que de bananes. Il y a 2 bananes de plus que d'oranges. Dans son panier, papa a :

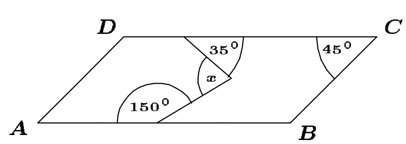
(a) 12 poires **(b)** 14 poires **(c)** 15 poires **(d)** 16 poires **(e)** 18 poires

15. Les points F et G sont les milieux des arêtes $[BC]$ et $[BE]$ du cube dessiné. Parmi les lignes brisées ci-dessous, qui joignent le sommet D au sommet A, quelle est la plus courte ?



(a) D-B-A **(b)** D-C-A **(c)** D-F-A **(d)** D-E-A **(e)** D-G-B-A

16. $ABCD$ est un parallélogramme. Les angles ayant les valeurs indiquées sur le dessin, combien vaut x ?

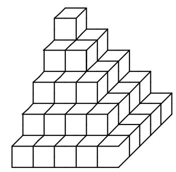


(a) 50° **(b)** 60° **(c)** 65° **(d)** 70° **(e)** 75°

17. Une montre digitale affiche l'heure $\boxed{19 :57 :33}$.
Quel est le nombre minimum de secondes qui s'écouleront avant que tous les chiffres de l'affichage aient changé ?

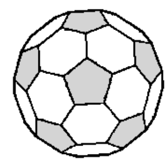
(a) 147 **(b)** 1 **(c)** 27 **(d)** 60 **(e)** 120

18. Cette pyramide est formée de petits cubes identiques de côté 1. Combien de petits cubes doit-on ajouter à la pyramide pour obtenir un grand cube de côté 5 ?



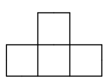
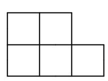
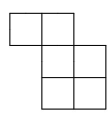
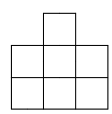
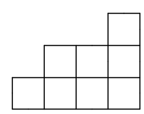
(a) 24 **(b)** 36 **(c)** 50 **(d)** 70 **(e)** 90

19. Un polyèdre en forme de ballon de football possède 32 faces : 20 sont des hexagones réguliers et 12 sont des pentagones réguliers. Combien ce solide a-t-il de sommets ?



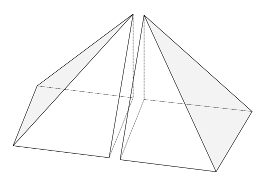
(a) 72 **(b)** 90 **(c)** 60 **(d)** 56 **(e)** 54

20. Avec quatre pièces de puzzle prises parmi les cinq ci-dessous, on peut former un carré. Quelle est la pièce qu'il ne faut pas utiliser ?

(a)  **(b)**  **(c)**  **(d)**  **(e)** 

Les questions 21 à 30 valent 5 points chacune.

21. Une pyramide régulière à base carrée est coupée en deux par un plan. On rassemble les deux moitiés en collant l'un contre l'autre les deux triangles isocèles grisés. Le nouveau solide obtenu possède :



(a) 5 faces **(b)** 6 faces **(c)** 4 faces **(d)** 7 faces **(e)** 8 faces

22. Un examen comporte 8 épreuves, chacune notée sur 5. Après les six premières épreuves, Anne a une moyenne de $3,5$. Quelle doit être sa moyenne aux deux dernières épreuves pour que sa moyenne finale soit de 4 ?

(a) 5 **(b)** c'est impossible **(c)** $4,5$ **(d)** 4 **(e)** $3,5$

23. On divise par 15 le nombre $\ll 10\ldots0\ldots\ldots0 \gg$ dont l'écriture décimale est un 1 suivi de 1997 zéros. Quel reste obtient-on ?

(a) 1 **(b)** 6 **(c)** 9 **(d)** 10 **(e)** 12

24. Quel nombre est le plus grand ?

(a) 2^{12} **(b)** 4^{15} **(c)** 8^{11} **(d)** 16^{8} **(e)** 32^{6}

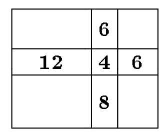
25. K est égal à 10% de L. L est égal à 20% de M. M est égal à 30% de N. Et P est égal à 40% de N. Alors, le rapport $\frac{K}{P}$ est égal à :

(a) 7 **(b)** $\frac{3}{2}$ **(c)** $\frac{2}{300}$ **(d)** $\frac{3}{200}$ **(e)** $\frac{1}{250}$

26. On plie soigneusement en deux une feuille de papier rectangulaire, cinq fois de suite, en pliant à chaque fois suivant un pli perpendiculaire au pli précédent. Après cela, on déchire les quatre coins du (petit) rectangle de papier obtenu. Ceci fait, on déplie la feuille. Combien de vrais trous voit-on alors à l'intérieur de la feuille de papier ?

(a) 4 **(b)** 9 **(c)** 18 **(d)** 20 **(e)** 21

27. Un grand rectangle est divisé en 9 petits rectangles, comme le montre le dessin. A l'intérieur de certains petits rectangles est inscrit leur *périmètre* en cm. Quel est le périmètre (en cm) du grand rectangle ?

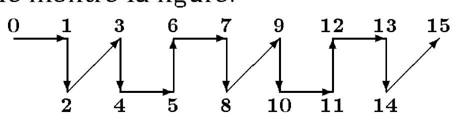


(a) 26 **(b)** 28 **(c)** 36 **(d)** 30 **(e)** 24

28. Pinocchio a une collection fantastique de calendriers des années précédentes. Mais il n'a pas de quoi s'offrir le calendrier 1997. Quel calendrier d'une année précédente doit-il utiliser pour que chaque date corresponde au bon jour de la semaine ?

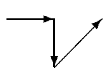
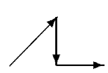
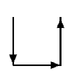
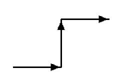
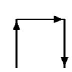
(a) 1986 **(b)** 1987 **(c)** 1989 **(d)** 1990 **(e)** 1996

29. Les nombres entiers de 0 à 2000 ont été reliés par des flèches comme le montre la figure.

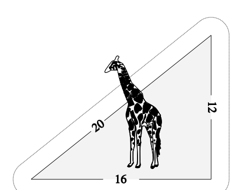


et ainsi de suite...

Quelle est la succession de flèches qui relie le nombre 1997 au nombre 2000 ?

(a)  **(b)**  **(c)**  **(d)**  **(e)** 

30. Une girafe est installée dans un curieux pré triangulaire, clôturé. Les côtés du pré mesurent 20 m, 16 m et 12 m. Grâce à son long cou, la girafe peut brouter la délicieuse herbe verte qui pousse à l'extérieur de la clôture jusqu'à une distance de 2 mètres. Soit S l'aire, en m^2, d'herbe verte qu'elle pourra brouter à l'extérieur de son pré. Parmi ces nombres, quelle est la meilleure approximation de S ?



(a) 96 **(b)** $99,14$ **(c)** $102,28$ **(d)** $105,42$ **(e)** $108,56$

Last number we gave the problems of the 1999 Maritimes Mathematics Competition, written March 11, 1999. Here are solutions.

1. Let natural numbers be assigned to the letters of the alphabet as follows: $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$, $\ldots$, $Z = 26$. The value of a word is defined to be the product of the numbers assigned to the letters in that word. For example, the value of $MATH$ is $13 \times 1 \times 20 \times 8 = 2080$. Find a word whose value is 285.

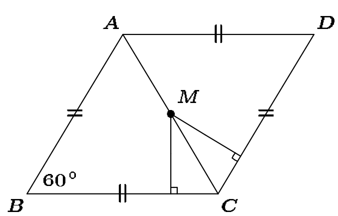
Solution. Factoring,

$$\begin{aligned} 285 &= 1 \times 3 \times 5 \times 19 = 1 \times 15 \times 19 \\ &= 3 \times 5 \times 19 = 15 \times 19\,. \end{aligned}$$

Now 15 corresponds to O and 19 to S, and the value of SO is 285. The other possible choices of letters, $\{A, O, S\}$, $\{C, E, S\}$ and $\{A, C, E, S\}$ (even repeating A) do not seem to give English words other than $ACES$ and $CASE$. (Luckily, OS, $ACES$ and $CASE$ are answers in French!)

2. A rhombus is a parallelogram with all four sides having the same length. If one of the interior angles of a rhombus is $60°$, find the ratio of the area of the rhombus to the area of the inscribed circle.

Solution.



Label the vertices $ABCD$ with $\angle ABC = 60°$. Then $\angle CDA = 60°$. Draw diagonal AC. Then

$$\begin{aligned} \angle BAC &= \angle BCA = 60° \\ &= \angle DAC = DCA\,. \end{aligned}$$

Let M be the mid-point of AC. Now the perpendicular distances from M to BC, from M to CD, from M to AD and from M to AB are all equal to $\frac{1}{2}\overline{AB}\sin 60°$, that is the radius of the inscribed circle.

The area of the inscribed circle is $\pi(\frac{1}{2}\overline{AB}\sin 60°)^2$. Thus

$$\frac{\text{Area of rhombus}}{\text{Area of inscribed circle}} = \frac{\overline{AB}^2 \sin 60°}{\pi(\frac{1}{2}\overline{AB}\sin 60°)^2} = \frac{4}{\pi \sin 60°} = \frac{8}{\pi\sqrt{3}}\,.$$

3. A straight line cuts the asymptotes of a hyperbola in points A and B and cuts the curve at points P and Q. Prove that $AP = BQ$. (Hint: Use the fact that every hyperbola can be rotated, translated and scaled so that it is given by the equation $xy = 1$, and the asymptotes in this case are just the x–axis and the y–axis.)

Solution. From the hint we can assume, without loss of generality, that the hyperbola is given by $xy = 1$. We may do this because rotations and translations do not affect lengths while scaling changes the lengths of segments of a fixed line by the same scale factor, no matter where they are located on the line. Now we may suppose that A is the point $(a, 0)$ and B is $(0, b)$ on the x and y axes respectively. If $a = 0$ then $b = 0$ and P, Q have the form $(\frac{1}{\sqrt{m}}, \sqrt{m})$, $(\frac{-1}{\sqrt{m}}, \sqrt{m})$ which are equidistant from $A = B = (0,0)$. So suppose $AB \neq 0$. Note that $ab \neq 0$. An equation of the line is then $bx + ay = ab$. From $y = \frac{1}{x}$, solving for P, Q

$$bx + \frac{a}{x} = ab\,, \qquad bx^2 - abx + a = 0\,, \qquad (x \neq 0)\,,$$

$$x = \frac{ab \pm \sqrt{a^2b^2 - 4ab}}{2b}\,,$$

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{x} &= \frac{2b}{ab \pm \sqrt{a^2b^2 - 4ab}} \\ &= \frac{2b(ab \mp \sqrt{a^2b^2 - 4ab})}{a^2b^2 - (a^2b^2 - 4ab)} = \frac{ab \mp \sqrt{a^2b^2 - 4ab}}{2a}\,. \end{aligned}$$

So the two points of intersection are

$$P = \left(\frac{ab + \sqrt{a^2b^2 - 4ab}}{2b}\,, \quad \frac{ab - \sqrt{a^2b^2 - 4ab}}{2a} \right)$$

and

$$Q = \left(\frac{ab - \sqrt{a^2b^2 - 4ab}}{2b}\,, \quad \frac{ab + \sqrt{a^2b^2 - 4ab}}{2a} \right)\,.$$

The squares of the distances in question become

$$\begin{aligned} AP^2 &= \left(\frac{ab + \sqrt{a^2b^2 - 4ab}}{2b} - a \right)^2 + \left(\frac{ab - \sqrt{a^2b^2 - 4ab}}{2a} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{a^2b^2 - 4ab} - ab}{2b} \right)^2 + \left(\frac{ab - \sqrt{a^2b^2 - 4ab}}{2a} \right)^2\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BQ^2 &= \left(\frac{ab - \sqrt{a^2b^2 - 4ab}}{2b} \right)^2 + \left(\frac{ab + \sqrt{a^2b^2 - 4ab}}{2a} - b \right)^2 \\ &= \left(\frac{ab - \sqrt{a^2b^2 - 4ab}}{2b} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{a^2b^2 - 4ab} - ab}{2a} \right)^2\,. \end{aligned}$$

So $AP = BQ$ as required.

4. Find the largest number n with the property that the sum of the cubes of its digits (in base 10) is greater than n.

Solution. Denote $n = d_k \dots d_1 = d_k 10^{k-1} + \cdots + d_1 10^0$ in base 10. Then, $d_k \neq 0$ and $0 \leq d_i \leq 9$ for $i = 1, 2, \dots, k$.

Thus $\sum_{i=1}^{k} d_i^3 \leq 9^3 \cdot k = 729k$. However $n \geq 1 \cdot 10^{k-1}$.

Now $729k < 10^{k-1}$ for $k \geq 5$, by induction on k, so $k \leq 4$.

Exploring $k = 4$, since $729 \times 4 = 2916$, we must in fact have $d_4 = 1$ or $d_4 = 2$ (and $\sum d_i^3 \leq 2187 + 1$ or $2187 + 8$).

If $d_4 = 2$, we must have $d_3 = 0$ or $d_3 = 1$ and $\sum d_i^3 \leq 1458 + 8 + 0$ or $1458 + 8 + 1$, so $d_4 \neq 2$. With $d_4 = 1$, we have 1999, which has $\sum d_i^3 = 2188$. The largest such number is 1999.

5. Find all non-negative numbers x, y and z such that

$$\begin{aligned} z^x &= y^{2x} \\ 2^z &= 2 \cdot 4^x \\ x + y + z &= 16\,. \end{aligned}$$

Solution. Note that x, y, $z \geq 0$.

With $x = 0$, $2^z = 2 \cdot 4^0 = 2$, giving $z = 1$ and $y = 15$, a solution.

So we suppose that $x > 0$. Then $z^x = y^{2x}$ implies (with $z, y \geq 0$) $z = y^2$, and $y = \sqrt{z}$.

From $2^z = 2 \cdot 4^x = 2^{2x+1}$ we have $z = 2x + 1$ and $y^2 = 2x + 1$.

Now $x + y + z = 16$ yields

$$\frac{y^2 - 1}{2} + y + y^2 = 16\,,$$

or

$$\begin{aligned} 3y^2 + 2y - 33 &= 0\,, \\ (3y + 11)(y - 3) &= 0\,, \\ y &= \frac{-11}{3}\,, \qquad y = 3\,, \quad \text{giving } y = 3 \text{ since } y \geq 0\,. \end{aligned}$$

Then $z = y^2 = 9$ and $x = \frac{y^2-1}{2} = 4$. The two solutions are therefore $(0, 15, 1)$ and $(4, 3, 9)$.

6. The following symmetric table is known as Sundaram's sieve. The first row and column is the arithmetic progression 4, 7, 10, 13, $\ldots$. Successive rows are also arithmetic progressions, the common differences, respectively being the odd integers 3, 5, 7, 9, $\ldots$. Show that for every positive integer n, $2n+1$ is prime if and only if n is not in the table.

$$\begin{array}{cccccccc}
4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 19 & 22 & \cdots \\
7 & 12 & 17 & 22 & 27 & 32 & 37 & \cdots \\
10 & 17 & 24 & 31 & 38 & 45 & 52 & \cdots \\
13 & 22 & 31 & 40 & 49 & 58 & 67 & \cdots \\
16 & 27 & 38 & 49 & 60 & 71 & 82 & \cdots \\
19 & 32 & 45 & 58 & 71 & 84 & 97 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Solution. Consider the entry in row i and column j of the table. The lead entry in row i is $1+3i$, and the common difference for that row $d_i = (1+2i)$, so the entry

$$\begin{aligned} a_{ij} &= (1+3i)+(1+2i)(j-1) \\ &= i+j+2ij\,. \end{aligned}$$

Now suppose first that n appears in the table, so there are i and j with $n = i+j+2ij$. Then $2n+1 = 2i+2j+4ij+1 = (2i+1)(2j+1)$, which is not prime since i, $j \geq 1$.

Conversely, suppose that $2n+1$ is not prime. As it is an odd number we have $2n+1 = (2i+1)(2j+1)$ for some $i, j \geq 1$.

But then $n = i+j+2ij = a_{ij}$ appears in the table.

That completes the *Skoliad Corner* for this number. I need contest materials at a suitable level, and I welcome your suggestions for features of future *Skoliad Corners*.