Le Repêchage de qualification de l'OMC 2018

Solutions officelles

1. Trouvez toutes les solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} y = 4x^3 + 12x^2 + 12x + 3 \\ x = 4y^3 + 12y^2 + 12y + 3 \end{cases}$$

Solution : On peut réécrire les deux équations de la façon suivante :

$$\begin{cases} y + 1 = 4(x+1)^3 \\ x + 1 = 4(y+1)^3 \end{cases}$$

En substituant la deuxième équation dans la première, on obtient

$$(y+1) = 256(y+1)^9$$

Par inspection, on remarque que $y = -1$ est une solution de l'équation. Si $y \neq -1$, l'équation peut être simplifiée à :

$$\frac{1}{2^8} = (y+1)^8$$

Les seules deux solutions réelles à cette équation sont $y + 1 = \pm\frac{1}{2}$.
Les possibilités sont donc $y = -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}$.
En substituant dans les équations plus haut, on obtient les trois solutions

$$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (-1, -1), (-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}).$$

□

Présenté par la Société mathématique du Canada et appuyé par la profession actuarielle.

2. Une paire de polygones p et q est dite *emboîtable* si l'on peut en dessiner un à l'intérieur de l'autre, possiblement après lui avoir fait faire une rotation et/ou une réflexion. Sinon, la paire de polygones est dite *non emboîtable*.

   Soit p et q des polygones. Démontrez que l'on peut trouver un polygone r semblable à q tel que r et p sont non emboîtables si et seulement si p et q ne sont pas semblables.

   Solution :

   Supposons que p et q sont semblables et que r est n'importe quel polygone semblable à q. On choisit des sommets homologues de p et r puis on trace les deux polygones avec la même orientation en plaçant les sommets choisis à la même position. Supposons sans perte de généralité que l'aire de p est inférieure à celle de r. Pour tout point m sur la frontière de p, il y a un segment de droite qui contient m, l'image de m sur le polygone r ainsi que les deux sommets choisis au départ. Puisque p a une aire inférieure à r, le point m est le point du milieu sur le segment. Ainsi, m est un point de r. Ceci est vrai pour tous les points de la frontière de p donc la frontière de p est contenue dans r. Comme r est convexe, ceci implique que p est contenu dans r. On peut procéder de la même manière si p a une aire supérieure à r.

   Supposons que p et q ne sont pas semblables. Soit r un polygone semblable à q qui a la même aire que p. Supposons que r peut être dessiné à l'intérieur de p. Alors puisque r et p ont la même aire, r et p doivent être semblables. Mais puisque r et q sont semblables, p et q doivent l'être aussi. Ainsi r ne peut pas être dessiné à l'intérieur de p. Pour la même raison, p ne peut pas être dessiné à l'intérieur de r. Donc on peut trouver r tel que p et r sont non-emboîtables. $\square$

3. Soit ABC un triangle tel que $AB = BC$. Démontrez que $\triangle ABC$ est obtus si et seulement si l'équation

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

   a deux solutions réelles distinctes, où A, B et C sont les angles du triangle en radians.

   Solution : Un polynôme de degré 2 a deux zéros distincts si et seulement si son discriminant est strictement positif. Le discriminant du polynôme donné est

$$B^2 - 4AC.$$

   Puisque $AB = BC$, on sait que $A = C$ et le discriminant devient ainsi

$$B^2 - 4C^2.$$

   Le discriminant est strictement positif si et seulement si :

$$B^2 > 4C^2.$$

   Comme B et C sont les angles d'un triangles, les deux sont positifs et on peut écrire :

$$B > 2C.$$

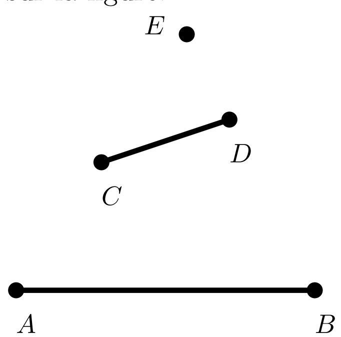
   Comme $A = C$, Ceci est équivalent à :

$$B > A + C,$$

   ce qui survient seulement lorsque le triangle est obtus. $\square$

4. Construisez un polygone convexe tel que chacun de ses côtés a la même longueur qu'une de ses diagonales et que chacune de ses diagonales a la même longueur qu'un de ses côtés ou démontrez qu'un tel polygone n'existe pas.

   Solution : Supposons qu'un tel polygone existe. Soit AB le plus long côté du polygone et CD la plus petite diagonale. Soit E un sommet du polygone du côté de CD opposé à AB, comme indiqué sur la figure.



   Comme AB est le plus long côté du polygone, AE et BE sont au plus de mesure AB. Ainsi, AB est le plus long côté du triangle AEB et donc $\angle AEB \geq 60°$.

   Comme CD est la plus petite diagonale du polygone, CE et DE sont au moins aussi longs que CD. Ainsi, CD est le plus petit côté du triangle CDE et donc $\angle CED \leq 60°$.

   Puisque le polygone est convexe, ni C ni D ne peuvent être à l'intérieur du triangle ABE à moins que $C = A$ ou $D = B$. Ainsi $\angle CED > \angle AEB$, ce qui contredit les paragraphes précédents. Aucun tel polygone ne peut donc exister. $\square$

5. Un palindrome est un nombre qui garde la même valeur lorsqu'on inverse l'ordre des chiffres qui le composent. Soit n un produit de nombres premiers distincts qui n'est pas divisible par 10. Démontrez que l'ensemble $\{nk : k \in \mathbb{Z}\}$ contient une infinité de palindromes.

   Solution : On considère un nombre premier p autre que 2, 3 ou 5 qui divise n. Par le petit théorème de Fermat, $10^{p-1} - 1$ est divisible par p et puisque $p \neq 3$, $(10^{p-1} - 1)/9$ est aussi divisible par p.

   Plus généralement, un nombre constitué de $p - 1$ chiffres 1 est divisible par p. Remarquons aussi que 111 est divisible par 3.

   Soit P l'ensemble de tous les premiers qui divisent n mis à part 2, 3 et 5.

   Soit m le PPCM de $\{p - 1\}$ pour tous les nombres premiers $p \in P$.

   Pour tout entier positif s, soit d_s le nombre qui consiste en $3ms$ chiffres 1 consécutifs.

   Si n n'est pas divisible par 2 ou par 5, alors par construction d_s est divisible par n pour tout s. Si s est divisible par 2 ou 5, alors $2d_s$ ou $5d_s$ sera divisible par s pour tout entier positif s. Ainsi, il y a une infinité de multiples de n qui sont des palindromes. $\square$

6. Soit $n \geq 2$ un entier positif. Déterminez le nombre de n-tuplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que $x_k \in \{0, 1, 2\}$ pour $1 \leq k \leq n$ et $\sum_{k=1}^n x_k - \prod_{k=1}^n x_k$ est divisible par 3.

   Solution : Soit $S(n)$ l'ensemble de tous les n-tuplets $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que $x_k \in \{0, 1, 2\}$ pour $1 \leq k \leq n$. Pour $\vec{x} \in S(n)$, soit $N_0(\vec{x})$ le nombre de chiffres 0 dans $\vec{x}$ et soit

$$F(\vec{x}) \ = \ \sum_{k=1}^n x_k - \prod_{k=1}^n x_k \quad (\text{modulo } 3)\,.$$

   Notre objectif est de déterminer la cardinalité de

$$S^*(n) \ = \ \{\vec{x} \in S(n) : F(\vec{x}) = 0\}\,.$$

   Remarquons que $\prod_{k=1}^n x_k = 0$ si et seulement si $N_0(\vec{x}) > 0$. Soit

$$\begin{aligned}
S_1(n) &= \{\vec{x} \in S(n) : N_0(\vec{x}) > 0,\ F(\vec{x}) = 0\} \\
&= \{\vec{x} \in S(n) : N_0(\vec{x}) > 0,\ \sum_{k=1}^n x_k = 0\} \\
\textit{Zéro}(n) &= \{\vec{x} \in S(n) : N_0(\vec{x}) = 0,\ \sum_{k=1}^n x_k = 0\} \\
\textit{Égal}(n) &= \{\vec{x} \in S(n) : N_0(\vec{x}) = 0,\ \sum_{k=1}^n x_k = \prod_{k=1}^n x_k\} \\
&= \{\vec{x} \in S(n) : N_0(\vec{x}) = 0,\ F(\vec{x}) = 0\} \\
\textit{Diff}(n) &= \{\vec{x} \in S(n) : N_0(\vec{x}) = 0,\ \sum_{k=1}^n x_k = -\prod_{k=1}^n x_k\}
\end{aligned}$$

   On sait que $N_0(\vec{x}) = 0$ si et seulement si chaque x_k vaut soit 1 ou 2. Remarquons aussi que

$$|S^*(n)| \ = \ |S_1(n)| + |\textit{Égal}(n)|\,.$$

   Débutons par étudier seule l'équation $\sum_{k=1}^n x_k = 0$. Il y a clairement 3^{n-1} n-tuplets qui satisfont l'équation puisqu'il y a toujours un unique x_n qui peut compléter un tel tuplet. Ainsi

$$|S_1(n)| + |\textit{Zéro}(n)| \ = \ 3^{n-1}.$$

   Il y a 2^n suites pour lesquelles $N_0(\vec{x}) = 0$, donc

$$|\textit{Zéro}(n)| + |\textit{Égal}(n)| + |\textit{Diff}(n)| = 2^n.$$

   Il est facile de vérifier par induction que si n est un multiple de 2,

$$|\textit{Zéro}(n)| = (2^n - 1)/3 + 1.$$

   Pour les autres $2 * (2^n - 1)/3$ suites, la moitié auront $\sum_{k=1}^n x_k = \prod_{k=1}^n x_k$ et l'autre auront $\sum_{k=1}^n x_k = -\prod_{k=1}^n x_k$.

Pour n'importe quelle suite $N_0(\vec{x}) = 0$, on remarque que la suite donnée par $3 - x_k$ a le même produit et la même somme mais de signe inverse. Ainsi

$$|\textit{Égal}(n)| = |\textit{Diff}(n)| = (2^n - 1)/3.$$

Ainsi, pour les valeurs paires n

$$\begin{aligned} |S^*(n)| &= |S_1(n)| + |\textit{Égal}(n)| \\ &= (3^{n-1} - |\textit{Zéro}(n)|) + |\textit{Égal}(n)| \quad = \; 3^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

Lorsque n est impair, on affirme que

$$\begin{aligned} |\textit{Zéro}(n)| &= \frac{2^n - 2}{3} \\ |\textit{Égal}(n)| &= \frac{2^n + 1}{3} + (-3)^{(n-1)/2} \\ |\textit{Diff}(n)| &= \frac{2^n + 1}{3} - (-3)^{(n-1)/2} \end{aligned}$$

En prenant le cas de base $n = 1$, il est facile de vérifier le résultat. Inductivement, on vérifie ce qui survient lorsqu'on ajoute $\{11, 12, 21, 22\}$ à chaque type de suite (i.e. les types Zéro, Égal et Diff).
En ajoutant 12 ou 21 à un suite de type Zéro, on obtient une autre suite de type Zéro. L'ajout de 11 ou 22 donnera une suite de type Diff et une suite de type Égal.
En ajoutant 12 ou 21 à un suite de type Égal, on obtient deux suites de type Diff. L'ajout de 11 ou 22 donnera une suite de type Diff et une suite de type Zéro.
En ajoutant 12 and 21 à un suite de type Diff, on obtient deux suites de type Égal. L'ajout de 11 ou 22 donnera une suite de type Égal et une suite de type Zéro.
En utilisant ces relations relations, on peut effectuer l'étape d'induction.
Pour n impair on trouve alors :

$$\begin{aligned} |S^*(n)| &= |S_1(n)| + |\textit{Égal}(n)| \\ &= (3^{n-1} - |\textit{Zéro}(n)|) + |\textit{Égal}(n)| \\ &= 3^{n-1} + 1 + (-3)^{(n-1)/2}. \end{aligned}$$

$\square$

7. Soit n un entier positif dont la factorisation en nombres premiers est

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$$

pour des nombres premiers distincts $p_1, \dots, p_r$, et e_i des entiers strictement positifs. On définit

$$rad(n) = p_1 p_2 \cdots p_r,$$

le produit de tous les facteurs premiers distincts de n.

Déterminez tous les polynômes $P(x)$ à coefficients rationnels tels qu'il existe une infinité d'entiers positifs n qui satisfont $P(n) = rad(n)$.

Solution : Remarquons que $0 < rad(n) \leq n$ pour tout n donc $0 < P(n) \leq n$ pour une infinité d'entiers positifs n. Ceci nous indique que le coefficient du terme directeur est positif et que le degré de $P(x)$ est 0 ou 1.

Si le degré de $P(x)$ est 0, alors $P(x) = c$ pour un certain entier positif c et il doit y avoir une infinité de solutions à l'équation $rad(n) = c$. Puisque $rad(n)$ est libre de carré pour n'importe quelle valeur de n, c doit aussi être libre de carré. Pour n'importe quel entier libre de carré $c = p_1 p_2 \cdots p_k$, on a $rad(p_1^m p_2 \cdots p_k) = c$ ce qui nous donne une infinité de valeurs possibles.

Si le degré de $P(x)$ est 1, on peut écrire $P(x) = \frac{ax+b}{c}$, où a, b, c sont des entiers tels que $a, c > 0$. Si $P(n) = rad(n)$ alors $c \cdot rad(n) = an + b$. Supposons que $b \neq 0$ et remarquons que $rad(n)|n$. Ainsi, $rad(n)|b$ et il y a donc un nombre fini de valeurs possibles pour $rad(n)$. Mais chaque valeur de $rad(n)$ détermine exactement n par $\frac{c \cdot rad(n) - b}{a}$, ce qui contredit qu'il y a une infinité de valeurs possibles pour n. Ainsi $b = 0$ et $P(x) = \frac{ax}{c}$. Lorsque $P(n) = rad(n)$ on obtient $c = a\frac{n}{rad(n)}$ et donc $a|c$. Ainsi, on peut écrire $P(x) = x/c$ pour un certain entier c.

Pour tout entier $c = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, soit $d = p_1^{\alpha_1+1} \cdots p_k^{\alpha_k+1}$. Pour tout premier p différent de $p_1, \dots p_k$ on a $rad(dp) = dp/c$ et il y a donc une infinité de solutions à $P(n) = rad(n)$.

Ainsi, les solutions sont $P(x) = c$ et $P(x) = x/d$ où c est n'importe quel entier strictement positif libre de carré et d est n'importe quel entier strictement positif. $\square$

8. Soit n et k des entiers positifs tels que $1 \leq k \leq n$. Un paquet de cartes numérotées de 1 à n sont disposées au hasard en rangée de la gauche vers la droite. Une personne exécute les deux types de mouvements suivants en alternance :

   (a) La carte la plus à gauche de la rangée est déplacée de $k-1$ positions vers la droite tandis que les cartes aux positions 2 à k sont toutes déplacées d'une position vers la gauche.

   (b) La carte la plus à droite de la rangée est déplacée de $k-1$ positions vers la gauche tandis que les cartes aux positions $n-k+1$ à $n-1$ sont toutes déplacées d'une position vers la droite.

   Déterminez la probabilité qu'après un certain nombre de mouvements, les cartes soient disposées dans l'ordre, de 1 à n, de la gauche vers la droite.

   Solution : On va montrer que la probabilité est :

$$\begin{cases} \frac{1}{n!} \text{ si } k = 1 \\ \frac{2k}{n!} \text{ si } 1 < k \leq \frac{n}{2} \\ \frac{4(n-k)+2}{n!} \text{ si } k > \frac{n}{2} \end{cases}$$

   Lorsque $k = 1$, aucun mouvement de cartes ne se produit et donc les cartes seront éventuellement dans le bon ordre si et seulement si elles l'étaient au départ.

   Lorsque $k \leq \frac{n}{2}$, les mouvements de type a affectent seulement la première moitié des cartes et les mouvements de type b affectent seulement la deuxième moitié. Après avoir effectué $2k$ mouvements, il est clair que nous revenons à la permutation de départ et que nous avons vu $2k$ différentes permutations des cartes.

   On numérote la position des cartes, la carte la plus à gauche étant en position 1. Lorsque $k > \frac{n}{2}$, on suit les mouvements de la carte en position 1. Le premier mouvement de type a amène la carte en position k. Tant que la carte n'est pas à la position n, un mouvement de type b la fera bouger d'une position vers la droite et un mouvement de type a ne la bougera pas du tout. Cela prendra $n-k$ mouvements de type b pour que la carte se retrouve en position n, ce qui fait $2(n-k)$ mouvements depuis le début. Après deux autres mouvements, la carte sera envoyée en position $n-k+1$. Il faudra ensuite $n-k$ mouvements de type a supplémentaires pour amener la carte en position 1 et un dernier mouvement de type b qui n'affecte pas sa position.

   On peut vérifier de manière semblable que toutes les autres cartes sont revenues à leur point de départ après ces mouvements. $\square$