1. (a) Trouvez tous les entiers positifs n tel que $11|(3^n + 4^n)$.

   Solution: On veut trouver tous les entiers n tels que $3^n \equiv -4^n \pmod{11}$. En multipliant les deux côtés de l'équation par 3^n, on obtient que $9^n \equiv -1 \pmod{11}$. On peut ensuite remarquer que $9^5 \equiv 1 \pmod{11}$ et qu'aucun entier n inférieur à 5 ne satisfait $9^n \equiv -1 \pmod{11}$. Ainsi, aucun entier n ne répond au critère proposé.

   (b) Trouvez tous les entiers positifs n tel que $31|(4^n + 7^n + 20^n)$.

   Solution: Puisque 7 et 31 sont copremiers, $0 \equiv 4^n + 7^n + 20^n \pmod{31}$ est équivalent à

$$\begin{aligned}
0 &\equiv \frac{4^n + 7^n + 20^n}{7^n} && \pmod{31} \\
&\equiv \left(\frac{20}{35}\right)^n + 1 + \left(\frac{100}{35}\right)^n && \pmod{31} \\
&\equiv 1 + \left(\frac{20}{4}\right)^n + \left(\frac{100}{4}\right)^n && \pmod{31} \\
&\equiv 1 + 5^n + 25^n && \pmod{31} \\
&\equiv 1 + 5^n + 5^{2n} && \pmod{31}
\end{aligned}$$

   Comme $5^3 \equiv 1 \pmod{31}$, cette somme ne dépend que de $n \pmod{3}$. On peut donc calculer:

$$\begin{aligned}
1 + 5^0 + 5^{2*0} &\equiv 3 && \pmod{31} \\
1 + 5^1 + 5^{2*1} &\equiv 0 && \pmod{31} \\
1 + 5^2 + 5^{2*2} &\equiv 0 && \pmod{31}
\end{aligned}$$

   Les solutions sont donc les entiers positifs qui ne sont pas des multiples de 3.

2. Soit $P = (7, 1)$ et $O = (0, 0)$.

   (a) Si S est un point sur la droite $y = x$ et T est un point sur l'axe des x de façon à ce que P soit sur la droite ST, déterminez la valeur minimale de l'aire du triangle OST.

   Solution: Soit (a, a) les coordonnées de S et $(b, 0)$ les coordonnées de T. Les segments de droite SP, PT et PT ont tous la même pente, soit $\frac{a-1}{a-7} = \frac{1}{7-b}$. En isolant b, on obtient $b = \frac{6a}{a-1}$. Le triangle a une base $OT = b$ et une hauteur a. Son aire est donc $A = \frac{6a^2}{2(a-1)} = \frac{3a^2}{a-1} = 3a + 3 + \frac{3}{a-1} = 3(a-1) + 6 + \frac{3}{a-1}$. Par l'inégalité arithmético-géométrique, $A \geq 2\sqrt{3(a-1)\frac{3}{a-1}} + 6 = 12$ avec égalité lorsque $3(a-1) = \frac{3}{a-1}$. Cette égalité survient lorsque $a = 2$ et on trouve $a = 2, b = 12$ donc une aire de 12.

(b) Si U est un point sur la droite $y = x$ et V est un point sur l'axe des x de façon à ce que P soit sur la droite UV, déterminez la valeur minimale pour le périmètre du triangle OUV.

Solution: Considérons un cercle tangent aux droites OU, OV et UV aux points A, B et C respectivement. On remarque que $AU = CU$ et $BV = CV$, donc que le périmètre de OUV vaut $OA + OB = 2OA$.

Afin de minimiser la somme, on doit minimiser la taille du cercle. Remarquons que si un cercle est tangent à UV en un point différent de P, alors il existe une droite passant par P qui ne touche pas au cercle. En prenant cette droite comme UV, il serait possible de réduire la taille du cercle. Ainsi, le périmètre est minimisé lorsque le cercle est tangent au point P.

Soit $U = (a, a)$, $V = (b, 0)$ et $OA = x$. Alors $VB = VC$, donc $\sqrt{(b-7)^2+1} = x - b$. En isolant b on trouve $b = \frac{x^2-50}{2x-14}$. De la même façon, $UP = UA$ et on trouve que $a = \frac{x^2-50}{2\sqrt{2}x-16}$.

Comme dans la partie (a) on obtient $b = \frac{6a}{a-1}$. On remplace les équations pour a et b dans cette dernière:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-50}{2x-14} &= \frac{6\frac{x^2-50}{2\sqrt{2}x-16}}{\frac{x^2-50}{2\sqrt{2}x-16}-1} \\
\frac{x^2-50}{2x-14} &= \frac{6\frac{x^2-50}{2\sqrt{2}x-16}}{\frac{x^2-2\sqrt{2}x-34}{2\sqrt{2}x-16}} \\
\frac{x^2-50}{2x-14} &= \frac{6(x^2-50)}{x^2-2\sqrt{2}x-34} \\
(x^2-50)(x^2-2\sqrt{2}x-34) &= (x^2-50)(12x-84) \\
(x^2-50)(x^2-(2\sqrt{2}+12)x+50) &= 0
\end{aligned}$$

On résout pour déterminer la valeur de x: $x = \pm\sqrt{50}, x = 6 + \sqrt{2} \pm 2\sqrt{3(\sqrt{2}-1)}$

Lorsque $x = \pm\sqrt{50}$, a et b sont tous deux 0, ce qui ne constitue pas une solution. Des deux valeurs restantes, on prend la plus élevée puisque l'autre survient lorsque le cercle est contenu à l'intérieur du triangle OUV. Le périmètre minimal est donc $2(6 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3(\sqrt{2}-1)})$.

3. Étant donné une grille de cubes unité de dimension $n \times n \times n$, un cube est dit *bon* s'il s'agit d'un sous-cube de la grille dont le côté mesure au moins deux. Si un bon cube contient un autre bon cube et que leurs faces n'ont aucune section en commun, le second est appelé *sous-cube propre* du premier. Quelle est la taille du plus gros ensemble de bons cubes tel qu'aucun des cubes de cet ensemble n'est un sous-cube propre d'un autre cube de l'ensemble?

Solution: Soit S l'ensemble des bons cubes de côté 2 ou 3. Pour tout $s \in S$, ont définit C_s comme l'ensemble des bons cubes qui ont s comme centre. On peut ainsi remarquer que pour tout s et toute paire de cubes distincts de C_s, un de ceux-ci doit être un sous-cube propre du second. De plus, pour tout bon cube c_1 de la grille, il existe un cube $c_2 \in S$ tel que c_2 est le centre de c_1. Ainsi, la taille du plus gros ensemble de cubes tels qu'aucun n'est un sous-cube propre d'un autre est $|S|$.

Pour conclure, on remarque qu'aucun cube de S n'est un sous-cube propre d'un autre cube de S. Ainsi, $|S| = (n-1)^3 + (n-2)^3$ est la valeur recherchée.

4. Trouvez toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x + f(y)) + f(x - f(y)) = x.$$

Solution: Soit $a = f(0)$ et posons $y = 0, x = a$. L'équation devient alors $f(2a) + f(0) = a$, ce qui est équivalent à $f(2a) = 0$. En posant ensuite $y = 2a$, on obtient $2f(x) = x$ et donc $f(x) = x/2$. En substituant cette relation dans l'équation de départ, on remarque qu'il s'agit bel et bien d'une solution. De plus, $f(x) = x/2$ est la seule solution.

5. Soit un polygone convexe P à n côtés dont le périmètre est P_0. Soit le polygone Q dont les sommets sont les points milieu des côtés de P et dont le périmètre est P_1. Montrez que $P_1 \geq \frac{P_0}{2}$.

Solution: Si P est un triangle, les côtés de Q sont parallèles aux côtés de P et ont exactement la moitié de la longueur du côté correspondant. Si P a au moins 4 côtés, on nomme les sommets $v_0, v_1, \ldots v_{n-1}$ en tournant dans le sens horaire. On nomme les points milieu $m_0, m_1, \ldots, m_{n-1}$ en tournant dans le même sens de façon à ce que m_0 soit le point milieu de v_0v_1. Remarquons que $2m_im_{i+1} = v_iv_{i+2}$, il est donc équivalent de montrer que $v_0v_2 + v_1v_3 + \cdots + v_{n-1}v_1 \geq v_0v_1 + v_1v_2 + \cdots v_{n-1}v_0$.

Le segment v_iv_{i+2} croise v_iv_{i+1} à un point w et croise $v_{i+1}v_{i+2}$ à un point x. On peut voir que $v_iw + wv_{i+1} \geq v_iv_{i+1}$ par l'inégalité triangulaire. On peut continuer de cette façon tout autour du polygone. On remarque que parmi tous les segments v_iv_{i+1}, les segments v_iw et wv_{i+1} sont des sous-segments disjoints des segments v_iv_{i+2}. Ainsi, nous avons $v_0v_2 + v_1v_3 + \cdots + v_{n-1}v_1 \geq v_0v_1 + v_1v_2 + \cdots v_{n-1}v_0$ et $P_1 \geq \frac{P_0}{2}$.

6. Trouvez tous les triplets ordonnés d'entiers strictement positifs (x, y, z) tel que $\text{PGCD}(x + y, y + z, z + x) > \text{PGCD}(x, y, z)$.

Solution: Soit $g = \text{PGCD}(x+y, y+z, z+x)$. Remarquons que $g$doit diviser $(x+y)+(y+z)-(x+z) = 2y$. De la même façon, g doit aussi diviser $2x$ et $2z$. Ainsi, g divise $2 \cdot \text{PGCD}(x, y, z)$. Afin que $g > \text{PGCD}(x, y, z)$ il est nécessaire que $g = 2 \cdot \text{PGCD}(x, y, z)$.

Supposons que $\text{PGCD}(x, y, z) = 1$. Alors 2 doit diviser $x + y, y + z$, et $z + x$. Ceci est seulement possible si x, y, z ont la même parité. Comme leur plus grand commun diviseur est 1, ils doivent donc être impairs. Ainsi, nous savons que x, y, z sont des nombres impairs multipliés par un commun facteur. Ceci est équivalent à ce que la plus grande puissance de deux qui divise chacun des 3 nombres est la même.

7. En débutant au point $(0, 0)$, Richard fait $2n + 1$ pas, chaque pas consistant à bouger d'une unité vers l'est, le nord, l'ouest ou le sud. Pour chaque pas, la direction est choisie aléatoirement avec

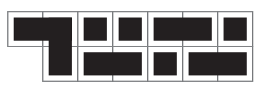
probabilité égale pour chaque direction. Déterminez la probabilité que Richard termine son trajet au point $(1,0)$.

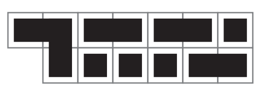
Solution: Afin que Richard termine son trajet à $(1,0)$, il doit faire le même nombre de pas vers le nord que vers le sud et il doit faire un pas de plus vers l'est que vers l'ouest. Ainsi, le nombre de pas faits vers le nord ou vers l'ouest est n, tout comme le nombre de pas faits vers le sud ou vers l'ouest. Le nombre de façons de choisir les n qui seront pris vers le nord ou vers l'ouest est $\binom{2n+1}{n}$, ce qui est le même nombre de façons de choisir les pas pris vers le sud ou l'ouest. Les pas vers l'ouest sont ceux qui font partie de ces deux ensembles. Puisqu'il y a au total $2n+1$ pas, la probabilité de terminer en $(1,0)$ sera alors de $\frac{\binom{2n+1}{n}^2}{4^{2n+1}}$.

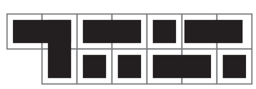
8. Soit $n \geq 3$ un entier positif. Une *grille ébréchée de taille* n est un échiquier de dimension $2 \times n$ dont la case inférieure gauche a été enlevée. Lino veut paver une grille ébréchée de taille n en utilisant les tuiles suivantes:

   - Type 1: toute tuile $1 \times k$ où $1 \leq k \leq n$
   - Type 2: toute tuile de la forme d'un échiquier ébréché de taille k où $1 \leq k \leq n$ qui doit nécessairement recouvrir la case la plus à gauche de la grille $2 \times n$.

   Deux pavages T_1 et T_2 sont considérés semblables s'il y a un ensemble de tuiles consécutives de type 1 dans chacune des rangées de T_1 qui peuvent être échangées verticalement afin d'obtenir T_2. Par exemple, les trois pavages suivants de la grille ébréchée de taille 7 sont semblables:







   Pour tout entier positif n et tout entier positif $1 \leq m \leq n$, soit $c_{m,n}$ le nombre de pavages distincts d'une grille ébréchée de taille n utilisant exactement m tuiles (n'importe quelle combinaison de tuiles peut être utilisée) et définissons

$$P_n(x) = \sum_{m=1}^{n} c_{m,n} x^m.$$

Trouvez, avec justification, des polynômes $f(x)$ et $g(x)$ tel que

$$P_n(x) = f(x)P_{n-1}(x) + g(x)P_{n-2}(x)$$

pour tout $n \geq 3$.

Solution: Étant donné une grille ébréchée de taille $(n-1)$, il est possible de l'étendre à une grille de taille n de 4 façons différentes. Pour chacune des deux nouvelles cases de la dernière colonne, on peut soit poser une nouvelle tuile ou poursuivre la tuile de la case qui est à sa gauche. Ceci nous donne la relation de récurrence $P_n(x) = (1 + 2x + x^2)P_{n-1}(x)$. Par contre, il faut noter que nous avons compté trop de configurations puisque certaines sont équivalentes entre elles et d'autres sont invalides.

On obtient des configurations équivalentes lorsque les k colonnes de droite de la grille ébréchée de taille $(n-1)$ contiennent chacune une tuile $1 \times k$. Dans ce cas, les deux nouvelles configurations qui consistent à poursuivre une seule des deux tuiles sont équivalentes. Le nombre de configurations comptées en trop est donné par x^3P_{n-1-k}, puisque cette expression nous donne le nombre de façons de remplir les $n-k-1$ premières colonnes.

De plus, remarquons que si la grille de taille $(n-1)$ est constituée d'une seule pièce, alors aucune des deux nouvelles configurations qui consistent à ajouter une seule tuile n'est valide. Ceci veut dire qu'il y a deux configurations invalides de taille 2 et le polynôme associé à cette contrainte est $2x^2$. Ainsi, la récurrence est

$$P_n(x) = (1 + 2x + x^2)P_{n-1}(x) - x^3(P_{n-2}(x) + P_{n-3}(x) + \cdots P_1(x)) - 2x^2.$$

On peut écrire une récurrence similaire pour $P_{n-1}(x)$:

$$P_{n-1}(x) = (1 + 2x + x^2)P_{n-2}(x) - x^3(P_{n-3}(x) + P_{n-4}(x) + \cdots P_1(x)) - 2x^2.$$

En soustrayant les deux récurrences, on obtient:

$$P_n(x) - P_{n-1}(x) = (1 + 2x + x^2)(P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)) - x^3P_{n-2}(x).$$

On peut simplifier l'expression à:

$$P_n(x) = (2 + 2x + x^2)P_{n-1}(x) - (1 + 2x + x^2 + x^3)P_{n-2}(x).$$