1. Soit une fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+$ et définissons $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+$ par $h(x, y) = \text{pgcd}(f(x), f(y))$. Si $h(x, y)$ est un polynôme à deux variables en x et y, montrez que ce polynôme doit être constant.

2. Alphonse et Brigitte jouent à un jeux avec n coffres forts et n clés. Chaque coffre peut être ouvert par une unique clé et chaque clé ouvre exactement un des coffres. Brigitte mélange aléatoirement les n clés et en place une dans chaque avant de tous les barrer avec sa clé maîtresse. Alphonse choisit ensuite m coffres ($m < n$) et Brigitte utilise sa clé maîtresse pour les ouvrir. Alphonse prend les clés contenues dans les m coffres et les utilise pour ouvrir les $n-m$ coffres restants. S'il est capable d'ouvrir un coffre avec une des m clés, il peut utiliser la clé ainsi trouvée pour ouvrir les autres coffres et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ait ouvert tous les coffres ou qu'il ne soit plus capable d'en ouvrir un de plus. Notons $P_m(n)$ la probabilité qu'Alphonse puisse éventuellement ouvrir les n coffres en débutant avec sa sélection de m clés.

   (a) Montrez que $P_2(3) = \frac{2}{3}$.

   (b) Montrez que $P_1(n) = \frac{1}{n}$.

   (c) Pour tous les entiers $n \geq 2$, montrez que

   $$P_2(n) = \frac{2}{n} \cdot P_1(n-1) + \frac{n-2}{n} \cdot P_2(n-1).$$

   (d) Trouvez une formule pour $P_2(n)$.

3. Soit $1000 \leq n = \text{ABCD}_{10} \leq 9999$ un entier positif dont l'écriture ABCD satisfait la condition de divisibilité suivante:

   $$1111 \mid (\text{ABCD} + \text{AB} \times \text{CD}).$$

   Trouvez la plus petite valeur possible pour n.

4. Dans $\triangle ABC$, l'intérieur des côtés est fait de miroirs et un laser est placé au point A_1 sur le côté BC. Un rayon laser émane de A_1, frappe le côté AC au point B_1 et est réfléchi. (À chaque fois que le rayon laser frappe un miroir, l'angle d'incidence est égal à l'angle réfléchi). Le laser frappe ensuite AB au point C_1, le côté BC au point A_2, le côté AC au point B_2, le côté AB au point C_2, le côté BC au point A_3 et le côté AC au point B_3.

   (a) Montrez que $\angle B_3A_3C = \angle B_1A_1C$.

   (b) Montrer qu'un tel laser existe si et seulement si $\triangle ABC$ sont tous inférieurs à $90°$.

5. Soit $f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1$.

   (a) Montrez que $f(x)$ ne peut être écrit comme un produit de deux polynômes non constants à coefficients entiers.

   (b) Trouvez la valeur exacte des quatre racines de $f(x)$.

6. Étant donné un triangle A, B, C, X sur le côté AB, Y sur le côté AC, et P et Q sur le côté BC de façon à ce que $AX = AY$, $BX = BP$ et $CY = CQ$. Supposons que XP et YQ se croisent en T. Montrez que AT passe par le point milieu de PQ.

7. Un insecte est situé à chaque sommet de l'hexagone régulier $ABCDEF$. À un instant précis, chaque insecte choisit un sommet de l'hexagone sur lequel il n'est pas et commence à avancer vers ce sommet. Chaque insecte voyage en ligne droite du sommet qu'il occupe vers le sommet choisi. Chaque insecte bouge à la même vitesse et est d'une grosseur négligeable. Une fois arrivés à leur objectif, les insectes arrêtent de bouger. De combien de façon différentes les insectes peuvent-ils bouger de façon à ce que deux insectes ne se trouvent jamais au même endroit au même moment?

8. Étant donné un entier positif m, on définit $f(m)$ comme le nombre de 1 dans sa représentation en base 2. Soit n un entier strictement positif. Montrez que l'entier

$$\sum_{m=0}^{2^n-1} \left((-1)^{f(m)} \cdot 2^m\right)$$

possède au moins $n!$ diviseurs positifs.

