Solutions officielles du Repêchage de la Qualification des Olympiades Mathématiques Canadiennes

1 Trouvez toutes les solutions réelles à l'équation suivante:

$$2^{(2^x)} - 3 \cdot 2^{\left(2^{x-1}+1\right)} + 8 = 0.$$

Solution: Soit $y = 2^{x-1}$. Alors $2^x = 2y$. La partie gauche de l'équation devient alors

$$2^{2y} - 3 \cdot 2^{y+1} + 8 = 0.$$

De façon équivalente,

$$2^{2y} - 6 \cdot 2^y + 8 = 0.$$

Ceci se factorise à

$$(2^y - 4)(2^y - 2) = 0.$$

Par conséquent, $2^y = 2$ ou 4. On trouve donc les solutions $y = 1, 2$. Ainsi, $2^{x-1} = 1, 2$, ce qui mène aux solutions $x - 1 = 0, 1$. Donc $x = 1, 2$.

On vérifie maintenant que ce sont bel et bien des solutions. Si $x = 1$, alors $2^{2^1} - 3 \cdot 2^{2^0+1} + 8 = 2^2 - 3 \cdot 2^2 + 8 = 4 - 12 + 8 = 0$. Donc $x = 1$ est une solution. Si $x = 2$, alors $2^{2^2} - 3 \cdot 2^{2^1+1} + 8 = 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 8 = 16 - 24 + 8 = 0$. Les solutions sont donc $x = 1, 2$. $\square$

2 Dans le triangle ABC, $\angle A = 90^\circ$ et $\angle C = 70^\circ$. F est un point sur AB tel que $\angle ACF = 30^\circ$, et E est un point sur CA tel que $\angle CFE = 20^\circ$. Montrez que BE est la bissectrice de $\angle B$.

Solution: Par le théorème de la bissectrice, il suffit de montrer que

$$\frac{BA}{BC} = \frac{EA}{EC}.$$

Par la définition de sin, nous avons que $\sin 70^\circ = BA/BC$. Par la loi des sinus,

$$\frac{EA}{EC} = \frac{EA}{EF} \cdot \frac{EF}{EC} = \sin 40^\circ \cdot \frac{\sin \angle ECF}{\sin \angle EFC} = \sin 40^\circ \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ}.$$

Ainsi, il est suffisant de montrer que

$$\sin 70^\circ = \frac{\sin 40^\circ \sin 30^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 40^\circ}{2 \sin 20^\circ}.$$

Par la formule d'addition pour sin, nous avons que $\sin 40^\circ = 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ$. Ainsi,

$$\frac{\sin 40^\circ}{2 \sin 20^\circ} = \cos 20^\circ = \sin 70^\circ.$$

Ceci démontre l'égalité voulue. $\square$

3 Un entier positif n a la propriété qu'il y a trois entiers positifs x, y, z tels que $\text{lcm}(x, y) = 180$, $\text{lcm}(x, z) = 900$ et $\text{lcm}(y, z) = n$, où lcm signifie le plus petit commun multiple. Trouvez le nombre d'entiers positifs n qui possèdent cette propriété.

Solution: Remarquons que 5 divise 180 une seule fois. Ainsi, 5 divise x, y chacun au plus une fois. Mais 5 divise 900 deux fois puisque 900 est divisible par 25. Puisque $\text{lcm}(x, z) = 900$ et 5 divise x au plus une fois, 5 divise z exactement deux fois. Ainsi, 25 divise z.

Remarquons que $900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$ et que z est un facteur de 900 qui est divisible par 5^2. Ainsi, z doit être de la forme

$$z = 2^a \times 3^b \times 5^2,$$

où $0 \leq a, b \leq 2$. On remarque aussi que puisque $\text{lcm}(x, y) = 180$, y est un facteur de $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$. Par conséquent, y doit être de la forme

$$y = 2^d \times 3^e \times 5^f,$$

où $0 \leq d, e \leq 2$ et $0 \leq f \leq 1$. Ainsi, $n = \text{lcm}(y, z)$ doit avoir la forme $2^r \times 3^s \times 5^2$, où $r = \max\{a, d\} \leq 2$ et $s = \max\{b, e\} \leq 2$. Donc $0 \leq r, s \leq 2$. Tous les nombres de cette forme sont des valeurs possibles pour n. Il y a trois possibilité pour r et pour s, ce qui mène à neuf valeurs différentes pour n.

On affirme que $(x, y, z) = (180, 1, n)$ satisfait les équations. Il est clair que $\text{lcm}(x, y) = \text{lcm}(180, 1) = 180$ et $\text{lcm}(x, z) = \text{lcm}(180, z) = \text{lcm}(2^2 \times 3^2 \times 5, 2^a \times 3^b \times 5^2) = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 = 900$. Finalement, $\text{lcm}(y, z) = \text{lcm}(1, n) = n$. Ceci démontre l'affirmation.

Ainsi, il y a neuf valeurs possibles pour n. $\square$

4 Quatre garçons et quatre filles amènent chacun un cadeau à un échange de cadeau. Sur une feuille de papier, chaque garçon écrit aléatoirement le nom d'une fille et chaque fille écrit aléatoirement le nom d'un garçon. À un moment précis, chaque personne passe son cadeau à la personne écrite sur son papier. Quelle est la probabilité que ces *deux* évènements se produisent:

(i) Chacun reçoit exactement un cadeau;

(ii) Aucun ensemble de deux personnes ne s'est mutuellement échangé de cadeau (i.e., si A a donné son cadeau à B, alors B n'a pas donné son cadeau à A).

Solution: La réponse est 27/8192.

Chaque personne a quatre possibilités de personne à qui donner son cadeau. Ainsi, il y a $4^8 = 2^{16}$ combinaisons d'échanges possibles.

Soit A, B, C, D les quatres garçons et a, b, c, d les quatres filles. Il y a $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ différentes manières pour que les garçons donnent un cadeau à chacune des filles. Sans perte de généralité, supposons que A a donné son cadeau à a, B a donné son cadeau à b, C a donné son cadeau à c et D a donné son cadeau à d.

Considérons le garçon auquel la fille a a donné son cadeau. Puisque A a donné son cadeau à a, a ne l'a pas donné à A. Ainsi, il y a trois garçons auxquels a aurait pu donner son cadeau. Sans perte de généralité, supposons que a a donné son cadeau à B. On note que b n'aurait pas pu donner son cadeau à B puisque B a offert son cadeau à b. Il y a maintenant deux cas possibles:

Si b donne son cadeau à A, alors parmi A, B, a, b, le cycle d'échange suivant se prosuit: $A \to a \to B \to b \to A$. Puisque C a déjà donné son cadeau à c et D a déjà donné son cadeau à d, alors c doit avoir offert son cadeau à D et d doit l'avoir offert à C. Il n'y a donc qu'une possibilité dans ce cas.

Si b donne son cadeau à C, voici le cycle d'échanges jusqu'à maintenant: $A \to a \to B \to b \to C \to c$. La fille c pourrait donner son cadeau aux garçons A ou D. Mais la fille c ne peut pas donner son cadeau à A car ceci impliquerait que D et d échangeraient leur cadeau. Ainsi, ceci implique que c donne son cadeau à D et donc que d donne son cadeau à A. Le cycle d'échanges résultant est $A \to a \to B \to b \to C \to c \to D \to d \to A$. C'est le seul résultat possible dans ce cas.

Si b donne son cadeau à D, alors en utilisant le même argument que lorsque b donne son cadeau à C, il n'y a qu'un seul résultat possible dans ce cas.

Ainsi, le nombre total d'échanges qui satisfait à la fois (i) et (ii) est $24 \times 3 \times (1+1+1) = 2^3 \times 3^3$.

La probabilité que les évènements (i) et (ii) se produisent est donc $2^3 \times 3^3/2^{16} = 3^3/2^{13} = 27/8192$. $\square$

5 Pour chaque entier positif k, soit $S(k)$ la somme de ses chiffres. Par exemple, $S(21) = 3$ et $S(105) = 6$. Soit n le plus petit entier tel que $S(n) - S(5n) = 2013$. Trouvez le nombre de chiffres composant n.

Solution: La réponse est 504.

Étant donné un chiffre A, on définit $f(A)$ comme le chiffre à la position des dizaines de $5A$ et $g(A)$ comme le chiffre à la position des unités de $5A$. Remarquons que

A	$f(A)$	$g(A)$
0	0	0
1	0	5
2	1	0
3	1	5
4	2	0
5	2	5
6	3	0
7	3	5
8	4	0
9	4	5

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme: Soit n un entier positif et $A_{k-1}, A_{k-2}, \ldots, A_0$ les chiffres de n, de la gauche vers la droite. Alors

$$S(n) - S(5n) = \sum_{j=0}^{k-1} (A_j - f(A_j) - g(A_j))\,.$$

Démonstration du lemme: Il est clair que,

$$S(n) = \sum_{j=0}^{k-1} A_j.$$

On considère maintenant $S(5n)$. Remarquons que

$$n = \sum_{j=0}^{k-1} A_j 10^j.$$

Ainsi

$$5n = \sum_{j=0}^{k-1} 5 \cdot A_j 10^j = \sum_{j=0}^{k-1} (10 f(A_j) + g(A_j)) 10^j = \sum_{j=0}^{k-1} \left(f(A_j) \cdot 10^{j+1} + g(A_j) 10^j \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} (f(A_{j-1}) + g(A_j))10^j,$$

où nous définissons $f(A_{-1}) = 0$ et $g(A_k) = 0$. Remarquons que $f(A_{j-1}) \in \{0,1,2,3,4\}$ et $g(A_j) \in \{0,5\}$. Ainsi, $f(A_{j-1}) + g(A_j) \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, i.e. a un seul chiffre dans son écriture. Donc

$$S(5n) = \sum_{j=0}^{k} (f(A_{j-1}) + g(A_j)) = \sum_{j=0}^{k-1} (f(A_j) + g(A_j)).$$

Par conséquent,

$$S(n) - S(5n) = \sum_{j=0}^{k-1} (A_j - f(A_j) - g(A_j)).$$

Ceci démontre le lemme. *Fin de la démonstration du lemme*

Étant donné un chiffre A, définissons $f(A)$ comme le chiffre à la position des dizaines de $5A$ et $g(A)$ comme le chiffre à la position des unités de $5A$. Remarquons que

A	$A - f(A) - g(A)$
0	0
1	-4
2	1
3	-3
4	2
5	-2
6	3
7	-1
8	4
9	0

La valeur de $A - f(A) - g(A)$ est maximale lorsque $A = 8$. Ainsi, pour déterminer la valeur minimale d'un n tel que $S(n) - S(5n) = 2013$, le Lemme nous dit qu'on doit s'assurer que le plus possible de chiffres de n sont des 8. Puisque $8 - f(8) - g(8) = 4$, le Lemme nous dit que n doit avoir au minimum $\lceil 2013/4 \rceil = 504$ chiffres. On affirme que c'est en fait le nombre minimal de chiffres que n doit posséder pour satisfaire $S(n) - S(5n) = 2013$. En fait, chaque occurrence de 8 dans n contribue à une valeur de 4 dans l'expression $S(n) - S(5n)$. On note que $2013 \equiv 1 \pmod 4$. À partir du tableau précédent, on remarque que $2 - f(2) - g(2) = 1$. Ainsi, un entier positif n possédant 504 chiffres dont un 2 et 503 $8's$, satisfera $S(n) - S(5n) = 2013$.

La réponse est donc 504.

6 Soit x, y, z des nombres réels plus grand ou égaux à 0 et plus petit ou égaux à $\frac{1}{2}$.

(a) Trouvez la valeur minimale possible de

$$x + y + z - xy - yz - zx$$

et trouvez tous les triplets (x, y, z) pour lesquels le minimum est atteint.

(b) Trouvez la valeur maximale possible de

$$x + y + z - xy - yz - zx$$

et trouvez tous les triplets (x, y, z) pour lesquels le maximum est atteint.

Solution de (a): Remarquons que $x+y+z-xy-yz-zx = x(1-y)+y(1-z)+z(1-x) \geq 0$ puisque $x, y, z \geq 0$ et $0 < 1-x, 1-y, 1-z \leq 1$. Ceci démontre l'inégalité.

On montre maintenant qu'il peut y avoir égalité. Pour que l'égalité tienne, chacun des termes $x(1-y), y(1-z), z(1-x)$ doit valoir 0. Remarquons que $x(1-y) = 0$ si et seulement si $x = 0$. ($y \neq 1$ puisuqe $0 \leq y \leq 1/2$.) De la même manière, $y(1-z) = 0$ si et seulement si $y = 0$. $z(1-x) = 0$ si et seulement si $z = 0$. Ainsi, l'égalité tient si et seulement si $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. $\square$

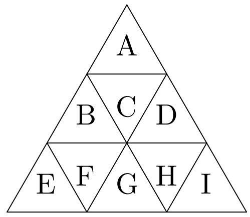
Solution 1 de (b): Soit $a = 1/2 - x, b = 1/2 - y, c = 1/2 - z$. Remarquons que $0 \leq a, b, c \leq 1/2$. Alors $x + y + z - xy - yz - zx =$

$$3/2 - (a + b + c) - (3/4 - a - b - c + ab + bc + ca) = 3/4 - (ab + bc + ca) \leq 3/4,$$

puisque $a, b, c \geq 0$. L'égalité tient si et seulement si $ab = bc = ca = 0$. Ceci tient si au moins deux parmi a, b, c sont nuls. Ainsi, l'égalité tient dans l'équation originale si et seulement si deux parmi x, y, z valent $1/2$. $\square$

Solution 2 de (b): Soit $S = x + y + z - xy - yz - zx$. Remarquons que S par rapport à x, y, z. Ainsi, on peur supposer sans perte de généralité que $x \leq y \leq z$. On peut réécrire S comme $x(1 - y - z) + y + z - yz$. Remarquons que $0 \leq 1 - y - z \leq 1$. Si $y + z \neq 1$ et $x < 1/2$, alors augmenter x fera augmenter S. Si $x = 1/2$, alors puisque $x \leq y \leq z$, $(x, y, z) = (1/2, 1/2, 1/2)$, on aura $S = 3/4$. Finalement, si $y + z = 1$, alors $y = z = 1/2$ puisque $y, z \leq 1/2$. Donc $S = y + z - yz = 3/4$. Ainsi, dans chaque cas, la plus grande valeur possible pour S est $3/4$. Donc la valeur maximale possible pour S est bien $3/4$. Dans les deux cas, l'égalité tient si et seulement si $y = z = 1/2$. Ainsi, $S = 3/4$ si et seulement si deux des x, y, z sont égaux à $1/2$. $\square$

7 On considère l'assemblage suivant constitué de neuf triangles avec les lettres $A, B, C, D, E, F, G, H, I$.



Une séquence de lettres choisie parmi les lettres $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ est dite *tri-amicale* si la première et la dernière lettre de la séquence est C et si pour chaque lettre excepté la première, le triangle contenant cette lettre partage une arête avec le triangle de la lettre précédente de la séquence. Par exemple, la lettre suivant C doit être soit A, B ou D. La séquence $CBFBC$ est tri-amicale mais les séquences $CBFGH$ et $CBBHC$ ne le sont pas.

(a) Trouvez le nombre de séquences tri-amicales comportant exactement 2012 lettres.

(b) Trouvez le nombre de séquences tri-amicales comportant exactement 2013 lettres.

Solution de (a): On colorie les triangle C, F, H en rouge et les autres en bleu. On remarque que dans toute séquence tri-amicale, la couleur des lettres doit alterner entre rouge et bleu. Puisque C est la première lettre de toute séquence tri-amicale, la première lettre doit toujours être rouge. Tous les lettres en position impaire dans une séquence tri-amicale doivent donc être rouge, et toutes les lettres dans un position paires doivent être bleues. Ainsi, la 2012$^{\text{e}}$ lettre d'une séquence tri-amicale doit être bleue, c'est donc impossible que ce soit C. Par conséquent, il n'y a aucune séquence tri-amicale de 2012 lettres.

Solution de (b): On définit une séquence triangle comme une séquence tri-amicale qui peut terminer par n'importe quelle lettre. Remarquons que les séquences tri-amicales sont des séquences triangle.

En utilisant le même argument qu'en (a), les lettres aux positions impaires doivent être C, F or H. Ainsi, un séquence triangle de longueur impaire doit se terminer par C, F ou H. Pour tout entier positif ou nul n, soit C_n, F_n, H_n le nombre de séquences triangle de longueur $2n+1$ qui se terminent respectivement en C, F, H. On veut trouver C_{1006}. Remarquons que $C_n + F_n + H_n$ est le nombre total de séquences triangle de longueur $2n+1$.

Par symétrie, on remarque aussi que $F_n = H_n$ pour tout entier positif ou nul n.

On commence par trouver le nombre total de séquences triangle de longueur $2n+1$. Notons cette quantité par T_n. Il est clair que $T_0 = 1$, puisque C est la seule séquence triangle de longueur 1. De façon inductive, étant donnée une séquence triangle de longueur $2n+1$, les premières $2n-1$ lettres forment une séquence triangle de longueur $2n-1$. Par symétrie de rotation, supposons que la deuxième avant dernière lettre est C. Il y a cinq chemins de longueur deux à partir de cette lettre, soit CAC, CBC, CDC, CBF, CDF. Ainsi, il y a cinq fois plus de séquences triangle de longueur $2n+1$ que de séquences triangle de longueur $2n-1$. Puisque $T_0 = 1$, $T_n = 5^n$.

On trouve maintenant la relation entre C_n, F_n, H_n. Considérons une séquence triangle de longeur ≥ 3 qui termine en C. La deuxième avant dernière lettre de cette séquence est C,F ou H. Si la lettre est C, il y a trois façons, soit CAC, CBC, CDC que la séquence termine en C. Si la lettre est F ou H, il n'y a qu'une façon, soit FBC ou HDC, pour que la séquence termine en C. Ainsi,

$$C_n = 3C_{n-1} + F_{n-1} + H_{n-1} = 3C_{n-1} + 2F_{n-1}.$$

Nous savons aussi que $C_n + 2F_n = T_n = 5^n$. Donc $F_n = (5^n - C_n)/2$. Ainsi,

$$C_n = 3C_{n-1} + 2 \cdot \frac{5^{n-1} - C_{n-1}}{2} = 2C_{n-1} + 5^{n-1}.$$

En utilisant cette relation de récurrence avec la condition initiale $C_0 = 1$, nous trouverons une formule générale pour C_n. Puisque nous voulons trouver le nombre de séquences tri-amicales de longueur 2013, nous voulons évaluer C_{1006}.

On affirme que

$$C_n = \frac{2^{n+1} + 5^n}{3},$$

pour tout entier n supérieur ou égal à zéro. Nous démontrons l'affirmation par induction sur n. Ceci est vrai pour $n = 0$ car $(2^1 + 5^0)/3 = 1$ qui est égal à C_0. Maintenant, supposons $C_m = \frac{2^{m+1}+5^m}{3}$ pour un certain entier m non nul. Alors

$$C_{m+1} = 2C_m + 5^m = 2\left(\frac{2^{m+1} + 5^m}{3}\right) + 5^m = \frac{2^{m+2} + 2 \cdot 5^m + 3 \cdot 5^m}{3} = \frac{2^{m+2} + 5^{m+1}}{3},$$

ce qui complète l'induction.

Ainsi, le nombre de séquences tri-amicales de longueur 2013 est

$$C_{1006} = \frac{2^{1007} + 5^{1006}}{3}.$$

8 Soit $\triangle ABC$ un triangle aigu avec orthocentre H et centre du cercle circonscrit O. Soit R le rayon du cercle circonscrit.

Soit A' le point sur AO (prolongé si nécessaire) pour lequel $HA' \perp AO$.
Soit B' le point sur BO (prolongé si nécessaire) pour lequel $HB' \perp BO$.
Soit C' le point sur CO (prolongé si nécessaire) pour lequel $HC' \perp CO$.

Montrez que $HA' + HB' + HC' < 2R$.

(Note: L'orthocentre d'un triangle est le point de rencontre des trois hauteurs. Le cercle circonscrit au triangle est le cercle qui passe par ses trois sommets.)

Solution: Puisque ΔABC est un triangle aigu, H et O se trouvent à l'intérieur de ΔABC. Par symétrie, on peut supposer sans perte de généralité que H est situé à l'intérieur ou sur la frontière de ΔOBC.

On notera l'aire d'un triangle XYZ par $[XYZ]$. Puisque H se situe à l'intérieur ou sur ΔOBC,

$$[OHB] + [OHC] \leq [OBC].$$

On considère maintenant ces trois quantités. Remarquons que

$$[OBC] = \frac{1}{2} \times OB \times OC \times \sin \angle BOC \leq \frac{1}{2} \times R \times R \times 1 = \frac{R^2}{2}.$$

On remarque aussi que

$$[OHB] = \frac{1}{2} \times OB \times HB' = \frac{1}{2} \times R \times HB'.$$

De la même façon,

$$[OHC] = \frac{1}{2} \times R \times HC'.$$

En rassemblant ces trois équations, l'inégalité donne

$$HB' + HC' \leq R.$$

Ainsi, pour montrer que $HA' + HB' + HC' < 2R$, il suffit de montrer que $HA' < R$.

Remarquons que $HA' \leq HO$ puisque A' est le pied de la perpendiculaire à OA par H. Puisque H se situe à l'intérieur de ΔABC, H est aussi à l'intérieur du cercle circonscrit de ΔABC ce qui implique que OH est strictement plus petit que le rayon du cercle circonscrit de ΔABC. En d'autres mots, $HO < R$. Donc $HA' < R$.

Ceci démontre l'inégalité. $\square$