Canadian Mathematical Olympiad Qualifcation Repechage

1 Trouvez toutes les solutions réelles à l'équation suivante :

$$2^{(2^x)} - 3 \cdot 2^{\left(2^{x-1}+1\right)} + 8 = 0.$$

2 Dans le triangle ABC, $\angle A = 90°$ et $\angle C = 70°$. F est un point sur AB tel que $\angle ACF = 30°$, et E est un point sur CA tel que $\angle CFE = 20°$. Montrez que BE est la bissectrice de $\angle B$.

3 Un entier positif n a la propriété qu'il y a trois entiers positifs x, y, z tel que $\text{ppcm}(x, y) = 180$, $\text{ppcm}(x, z) = 900$ et $\text{ppcm}(y, z) = n$, où ppcm signifie le plus petit commun multiple. Trouvez le nombre d'entiers positifs n possédant cette propriété.

4 Quatre garçons et quatre filles amènent chacun un cadeau à un échange de cadeau. Sur une feuille de papier, chaque garçon écrit au hasard le nom d'une des filles présentes. De la même façon, chaque fille écrit le nom d'un garçon. Au même moment, chacun donne son cadeau à la personne écrite sur sa feuille. Trouvez la probabilité que ces *deux* évènements se produisent :

(i) Chaque personne reçoit exactement un cadeau ;

(ii) Deux personnes ne s'échangent pas mutuellement leur cadeau (i.e., si A donne son cadeau à B, alors B ne donne pas son cadeau à A).

5 Pour tout entier positif k, posons $S(k)$ la somme des chiffres de son écriture. Par exemple, $S(21) = 3$ et $S(105) = 6$. Soit n le plus petit entier pour lequel $S(n) - S(5n) = 2013$. Trouvez le nombre de chiffres que comporte l'écriture de n.

6 Soit x, y, z des nombres réels qui sont supérieurs ou égaux à 0 et plus petits ou égaux à $\frac{1}{2}$.

(a) Trouvez la valeur minimale possible pour

$$x + y + z - xy - yz - zx$$

et énumérez tous les triplets (x, y, z) pour lesquels ce minimum est atteint.

(b) Trouvez la valeur maximale possible pour

$$x + y + z - xy - yz - zx$$

et énumérez tous les triplets (x, y, z) pour lesquels ce maximum est atteint.

7 Considérez la figure suivante formée de 9 triangles étiquetés par les lettres $A, B, C, D, E, F, G, H, I$.

A

B C D

E F G H I

Une séquence de lettres dont chaque lettre est choisie parmi $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ est dite *tri-amicale* si la séquence débute et termine par la lettre C et si chaque fois que deux lettres sont consécutives dans la séquence, leurs triangles correspondants partagent un côté dans la figure précédente. Par exemple, la lettre suivant C doit être A, B ou D. De plus, la séquence $CBFBC$ est tri-gentille contrairement à $CBFGH$ et $CBBHC$.

(a) Trouvez le nombre de séquences tri-amicales de longueur 2012.

(b) Trouvez le nombre de séquences tri-amicales de longueur 2013.

8 Soit un triangle aigu $\triangle ABC$ avec H son orthocentre et O le centre de son cercle circonscrit. On pose R le rayon du cercle circonscrit.

Soit A' le point sur AO (prolongé si nécessaire) pour lequel $HA' \perp AO$.
Soit B' le point sur BO (prolongé si nécessaire) pour lequel $HB' \perp BO$.
Soit C' le point sur CO (prolongé si nécessaire) pour lequel $HC' \perp CO$.

Montrez que $HA' + HB' + HC' < 2R$.

(Note : L'orthocentre d'un triangle est le point de rencontre de ses trois hauteurs. Le cercle circonscrit à un triangle est le cercle passant par ses trois sommets.)