XVI^{ième} OLYMPIADE MATHÉMATIQUE
DE L'ASIE DU PACIFIQUE
Mars 2004

Temps alloué: 4 heures
Aucune calculatrice n'est permise
Chaque problème porte une valeur totale de 7 points

Problème 1.

Trouver tous les ensembles finis non vide S d'entiers positifs tels que

$$\frac{i+j}{(i,j)} \qquad \text{soit un élément de } S \text{ pour tout } i,j \text{ dans } S,$$

où (i,j) est le plus grand commun diviseur de i et j.

Problème 2.

Soit O le centre du cercle circonscrit à un triangle aigu, et H l'orthocentre du même triangle. Montrer que la superficie d'un des triangles AOH, BOH and COH est égale à la somme des superficies des deux autres.

Problème 3.

Soit S un ensemble donné comprenant 2004 points du plan cartésien, sans contenir trois points colinéaires. Soit maintenant $\mathcal{L}$ l'ensemble de toutes les droites (étendues indéfiniment dans les deux directions) déterminées par toutes les paires de points de l'ensemble. Montrer qu'il est possible de colorier les points de S avec au plus deux couleurs de sorte que pour tous points p,q de S, le nombre de droites dans $\mathcal{L}$ qui séparent p de q soit impair si et seulement si p et q aient la même couleur.

Remarque: Une droite ℓ *sépare* deux points p et q si p et q se trouvent sur des côtés opposés de ℓ sans toucher la droite ℓ.

Problème 4.

Etant donné un nombre réel x, dénotons par $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier plus petit ou égal à x. Montrer que

$$\left\lfloor \frac{(n-1)!}{n(n+1)} \right\rfloor$$

est pair pour tout entier positif n.

Problème 5.

Montrer que

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca)$$

pour tous nombres réels $a,b,c>0$.