XII$^{\grave{e}me}$ OLYMPIADE MATHÉMATIQUE

DE L'ASIE DU PACIFIQUE 2000

Temps alloué: 4 heures
Aucune calculatrice n'est permise
Chaque problème porte une valeur totale de 7 points

Problème 1. Calculer la somme

$$S = \sum_{i=0}^{101} \frac{x_i^3}{1 - 3x_i + 3x_i^2}$$

où $x_i = \dfrac{i}{101}$.

Problème 2. Considérer l'arrangement de cercles suivant:

Chacun des nombres 1, 2, ..., 9 doit être écrit dans l'un des cercles, de sorte que chaque cercle contienne exactement un de ces nombres et

- les sommes des quatres nombres de chaque côté doivent être égales;
- les sommes des carrés des quatres nombres de chaque côté doivent être égales.

Trouver toutes les façons possibles d'y réussir.

Problème 3. Soit ABC un triangle donné. Soient M et N les points de rencontre de la médianne et de l'angle bisecteur en A respectivement avec le côté BC. Soient de plus Q et P les points où la perpendiculaire à NA

passant par N rencontre MA et BA respectivement, et finalement soit O le point où la perpendiculaire à BA passant par P rencontre AN.

Montrer que QO est perpendiculaire à BC.

Problème 4. Soient n, k des entiers positifs tels que $n > k$. Montrer que

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}} < \frac{n!}{k!(n-k)!} < \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}} .$$

Problème 5. Étant donné une permutation $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de la suite $0, 1, \ldots, n$, on appele une transposition de a_i avec a_j *légale* si $i > 0$, $a_i = 0$ et $a_{i-1} + 1 = a_j$. La permutation $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ est dite *régulière* si après un certain nombre de transpositions légales, elle devienne $(1, 2, \ldots, n, 0)$. Pour quels nombres n la permutation $(1, n, n-1, \ldots, 3, 2, 0)$ est-elle régulière?