VIII Olympiade Mathématique du Pacifique Asiatique

Temps alloué: 4 heures.
Aucune calculatrice n'est permise.
Chaque problème compte pour 7 points.

Problème 1. Soit $ABCD$ un quadrilatère dont $AB = BC = CD = DA$. Soit de plus MN et PQ deux segments perpendiculaires à la diagonale BD tels que la distance entre eux soit $d > BD/2$, avec $M \in AD$, $N \in DC$, $P \in AB$, et $Q \in BC$. Montrer que le périmètre de l'hexagone $AMNCQP$ ne dépende pas de la position des segments MN et PQ, en autant que la distance entre eux demeure constante.

Problème 2. Soit m et n des entiers positifs tels que $n \leq m$. Montrer que

$$2^n n! \leq \frac{(m+n)!}{(m-n)!} \leq (m^2+m)^n$$

Problème 3. Soient P_1,P_2, P_3, P_4 quatre points sur un cercle donné, et soit I_1 le centre du cercle inscrit au triangle $P_2P_3P_4$; I_2 le centre du cercle inscrit au triangle $P_1P_3P_4$; I_3 le centre du cercle inscrit au triangle $P_1P_2P_4$; I_4 le centre du cercle inscrit au triangle $P_2P_3P_1$. Montrer que I_1, I_2, I_3, I_4 forment quatre sommets d'un rectangle.

Problème 4. Le Conseil National du Mariage a l'intention d'inviter n couples pour former 17 groupes de discussion sous les conditions suivantes:

1. Tous les membres d'un groupe doivent être du même sexe; c.-à-d. ils doivent tous être des femmes ou des hommes.
2. La différence entre le nombre de deux groupes quelconques doit être 0 ou 1.
3. Tous les groupes doivent avoir au moins un membre.
4. Chaque personne doit appartenir à un et un seul groupe.

Trouver toutes les valeurs de n, $n \leq 1996$, pour lesquelles ceci soit possible. Justifier votre réponse.

Problème 5. Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle. Montrer que

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

et déterminer les cas d'égalité.