Mars, 1995
Temps alloué: 4hrs.
Aucune calculatrice autorisée.
Chaque problème porte une valeur de 7 points.

Problème 1.- Déterminer toutes les suites de nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_{1995}$ qui satisfassent:

$$2\sqrt{a_n - (n-1)} \geq a_{n+1} - (n-1), \text{ pour } n = 1, 2, \ldots, 1994,$$

de plus que

$$2\sqrt{a_{1995} - 1994} \geq a_1 + 1.$$

Problème 2.- Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ une suite de nombres entiers dont les valeurs se situent entre 2 et 1995 et telle que:

i) les a_i soient relativement premiers.

ii) chaque a_i soit lui-même premier ou alors un produit de nombres premiers différents.

Déterminer la plus petite valeur de n de sorte que la suite contienne nécessairement un nombre premier.

Problème 3.- Soit $PQRS$ un quadrilatère cyclique (c.-à-d. P, Q, R, S sont tous sur un cercle) tel que les droites PQ et RS ne soient pas parallèles. Considérons maintenant l'ensemble des cercles contenant P et Q, et l'ensemble des cercles contenant R et S. Déterminer l'ensemble A des points de tangence des cercles de ces deux ensembles.

Problème 4.- Soit C un cercle de rayon R et centre O, et S un point fixe à l'intérieur de C. Étant donné un point A sur le cercle, formons les cordes perpendiculaires AA' et BB' passant par S, et finalement les rectangles $SAMB$, $SBN'A'$, $SA'M'B'$, et $SB'NA$. Trouver l'ensemble de tous les points M, N', M', et N lorsque A se déplace complètement autour du cercle.

Problème 5.- Trouver le plus petit entier positif k tel qu'il existe une fonction f de l'ensemble Z de tous les nombres entiers à $\{1, 2, \ldots, k\}$ ayant la propriété que $f(x) \neq f(y)$ chaque fois que $|x - y| \in \{5, 7, 12\}$.