SOLUTIONS

QUESTION 1

Solution 1.

Soit $\mathcal{S}$ la somme donnée. Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\left(\frac{n}{(n-1)!}+\frac{n+1}{n!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{1993}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n!}+\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\frac{n+1}{n!}\\ &= -1+\frac{1995}{1994!}\end{aligned}$$

Solution 2.

Pour un numbre entier positif k, posons

$$\mathcal{S}(k)=\sum_{n=1}^{k}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{n!}.$$

On montre alors par récurrence sur k que

$$(*) \qquad \mathcal{S}(k)=-1+(-1)^k\frac{k+1}{k!}.$$

La somme désirée est obtenue en substituant $k=1994$. Pour $k=1$, $\mathcal{S}(1)=-3=-1-\frac{2}{1!}$. Si maintenant l'équation (*) est vérifiée pour une valeur de $k\geq 1$, alors

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(k+1) &= \mathcal{S}(k)+(-1)^{k+1}\frac{(k+1)^2+(k+1)+1}{(k+1)!}\\ &= -1+(-1)^k\frac{k+1}{k!}+(-1)^{k+1}\left(\frac{k+1}{k!}+\frac{k+2}{(k+1)!}\right)\\ &= -1+(-1)^{k+1}\frac{k+2}{(k+1)!}\end{aligned}$$

complétant ainsi la récurrence.

QUESTION 2

Solution 1.

Fixons un entier positif n, et posons $a = (\sqrt{2}-1)^n$ et $b = (\sqrt{2}+1)^n$. Evidemment $ab = 1$. Posons de plus $c = (b+a)/2$ et $d = (b-a)/2$. Si n est pair, par exemple $n = 2k$, alors du théorème du binôme on obtient

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\sqrt{2}^{n-i} + (-1)^i\sqrt{2}^{n-i}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k}\binom{2k}{2j}\sqrt{2}^{2k-2j} \\ &= \sum_{j=0}^{k}\binom{2k}{2j}2^{k-j} \end{aligned} \tag{1}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d}{\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\sqrt{2}^{n-i} - (-1)^i\sqrt{2}^{n-i}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{2k}{2j+1}\sqrt{2}^{2k-2j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\binom{2k}{2j+1}2^{k-j} \end{aligned} \tag{2}$$

montrant ainsi que c et $\frac{d}{\sqrt{2}}$ sont tous deux entiers positifs. De même, lorsque n est un nombre impair, $\frac{c}{\sqrt{2}}$ et d sont aussi entiers positifs et donc dans chaque cas, c^2 et d^2 sont entiers. Remarquons de plus que

$$c^2 - d^2 = \frac{1}{4}((b+a)^2 - (b-a)^2) = ab = 1.$$

Finalement, si on pose $m = c^2$, on obtient $m-1 = c^2-1 = d^2$ et $a = c-d = \sqrt{m}-\sqrt{m-1}$.

Solution 2.

Soient m et n des entiers positifs, et remarquons que

$$(\sqrt{2}-1)^n(\sqrt{2}+1)^n = 1 = (\sqrt{m}-\sqrt{m-1})(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})$$

et donc

$$(*) \quad (\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{m}-\sqrt{m-1} \text{ si et seulement si } (\sqrt{2}+1)^n = \sqrt{m}+\sqrt{m-1}.$$

Si on suppose que m et n vérifient l'équation (*), alors en ajoutant les deux équations équivalentes l'on obtient $2\sqrt{m} = (\sqrt{2}-1)^n + (\sqrt{2}+1)^n$ d'où:

$$(**) \qquad m = \frac{1}{4}[(\sqrt{2}-1)^{2n} + 2 + (\sqrt{2}+1)^{2n}].$$

On montre maintenant que les étapes précédentes sont réversibles et que m défini par l'équation (**) est un entier. D'abord de (**) on s'aperçoit que

$$\sqrt{m} = \frac{1}{2}[(\sqrt{2}-1)^n + (\sqrt{2}+1)^n] \text{ et } \sqrt{m-1} = \frac{1}{2}[(\sqrt{2}+1)^n - (\sqrt{2}-1)^n],$$

et donc $\sqrt{m}-\sqrt{m-1} = (\sqrt{2}-1)^n$ comme requis. En utilisant finalement le théorème du binôme on obtient

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{2}-1)^{2n} + (\sqrt{2}+1)^{2n} = \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} [(-1)^k 2^{(2n-k)/2} + 2^{(2n-k)/2}] \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \binom{2n}{2\ell} 2^{n-\ell+1}
\end{aligned}$$

qui est congruent à 2 modulo 4 puisque $2^{n-\ell+1} \equiv 0 \pmod 4$ pour tout $\ell = 0, 1, 2, \cdots, n-1$. Donc, $(\sqrt{2}-1)^{2n} + 2 + (\sqrt{2}+1)^{2n}$ est un multiple de 4, comme requis.

Solution 3.

On montre par récurrence que

$$(*) \qquad (\sqrt{2}-1)^n = \begin{cases} a\sqrt{2}-b \text{ où } 2a^2 = b^2+1 \text{ si } n \text{ est impair} \\ a-b\sqrt{2} \text{ où } a^2 = 2b^2+1 \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}.$$

Donc $m = 2a^2$ si n est impair et $m = a^2$ si n est pair et le problème est résolu.

La récurrence procède comme suit. D'abord pour $n = 1, 2$ on a

$$(\sqrt{2}-1)^1 = 1\sqrt{2}-1 \text{ où } 2(1)^2 = 1^2+1$$
$$(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2} \text{ où } 3^2 = 2(2)^2+1.$$

Si on suppose maintenant l'équation (*) vérifiée pour n impair, $n \geq 1$, alors

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{2}-1)^{n+1} \\
&\quad = (a\sqrt{2}-b)(\sqrt{2}-1) \text{ où } 2a^2 = b^2+1 \\
&\quad = (2a+b)-(a+b)\sqrt{2} \\
&\quad = A-B\sqrt{2} \text{ où } A = 2a+b, B = a+b.
\end{aligned}$$

De plus $A^2 = 2a^2+4ab+b^2+2a^2 = 2a^2+4ab+2b^2+1 = 2B^2+1$.

Si on suppose par ailleur l'équation (*) vérifiée pour n pair, $n \geq 2$, alors

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{2}-1)^{n+1} \\
&\quad = (a-b\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) \text{ où } a^2 = 2b^2+1 \\
&\quad = (a+b)\sqrt{2}-(a+2b) \\
&\quad = A\sqrt{2}-B \text{ où } A = a+b, B = a+2b.
\end{aligned}$$

De plus, $2A^2 = 2a^2+4ab+2b^2 = a^2+4ab+4b^2++a^2-2b^2 = B^2+1$.

Solution 4.

Des égalités $(\sqrt{2}-1)^1 = \sqrt{2}-1$, $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$, $(\sqrt{2}-1)^3 = 5\sqrt{2}-7$, $(\sqrt{2}-1)^4 = 17-12\sqrt{2}$, etc, on conjecture que

$$(*) \qquad (\sqrt{2}-1)^n = s_n\sqrt{2}+t_n$$

où $s_1 = 1$, $t_1 = 1$, $s_{n+1} = (-1)^n(|s_n|+|t_n|)$, $t_{n+1} = (-1)^{n+1}(2|s_n|+|t_n|)$.

Remarquons d'abord que s_n est positif (négatif) si n est impair (pair) et que t_n est négatif (positif) si n est impair (pair).

On vérifie maintenant (*) par récurrence de plus du fait que $s_n\sqrt{2}+t_n$ soit de la forme $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ pour un nombre m quelconque.

On vérifie d'abord facilement (*) pour les valeurs $n = 1,2$. Si on suppose maintenant (*) pour $n \geq 2$, alors

$$(\sqrt{2}-1)^{n+1} = (s_n\sqrt{2}+t_n)(\sqrt{2}-1) = (t_n-s_n)\sqrt{2}+(2s_n-t_n).$$

Si n est impair, alors

$$\begin{aligned} t_n - s_n &= -(|t_n|+|s_n|) = s_{n+1} \\ 2s_n - t_n &= 2|s_n|+|t_n| = t_{n+1}. \end{aligned}$$

Si maintenant n est pair, on a

$$\begin{aligned} t_n - s_n &= |t_n|+|s_n| = s_{n+1} \\ 2s_n - t_n &= -2|s_n|-|t_n| = t_{n+1}. \end{aligned}$$

On a donc vérifié (*) pour tout n.

Remarquons maintenant que $(s_{n+1}\sqrt{2})^2 - t_{n+1}^2 = 2(s_n^2-2s_nt_n+t_n^2)-(4s_n^2-4s_nt_n+t_n^2)$ $= -2s_n^2+t_n^2 = -((s_n\sqrt{2})^2-t_n^2)$. Comme $(s_1\sqrt{2})^2-t_1^2 = 1$, il s'en suit que $(s_n\sqrt{2})^2-t_n^2 = (-1)^{n+1}$ pour tout n. Pour finalement terminer la démonstration, il nous suffit de remplacer $m = (s_n\sqrt{2})^2$, $m-1 = t_n^2$ si n est impair et $m = t_n^2$, $m-1 = (s_n\sqrt{2})^2$ si n est pair.

QUESTION 3

On remarque d'abord que si deux voisins répondent du même vote au $n^{\text{ième}}$ tour, alors ils répondront du même vote à chaque tour suivant.

Soit A_n le groupe de participants qui répondent de la même façon avec au moins un de leurs voisins au $n^{\text{ième}}$ tour. Le paragraphe précédent montre que $A_n \subset A_{n+1}$ pour chaque n. On a aura donc terminé la démonstration si on arrive à montrer que A_n comprend les 25 participants pour une valeur de n.

Comme la table comprend un nombre impair de participants, il est impossible qu'au premier tour tous soient en désaccord avec leurs voisins. Donc A_1 comprend au moins deux hommes. On peut évidemment aussi trouver une valeur N telle que $A_N = A_{N+1}$. Soit P appartenant à A_N et Q un voisin de P. Comme P ne changera plus son vote, Q doit voter de la même façon que P car sinon Q appartiendra à A_{N+1} et non à A_N. Donc tout voisin d'un membre de A_N appartient à A_N, ce qui siginifie bien sûr que A_N comprenne en effet les 25 participants.

QUESTION 4

On doit considérer trois cas:

Cas 1: Si P se trouve à l'extérieur de Ω (voir les figures I, II, et III), alors puisque $\angle AUB = \angle AVB = \pi/2$, on obtient

$$\cos(\angle APB) = \frac{PU}{PB} = \frac{PV}{PA} = \sqrt{\frac{PU}{PA} \cdot \frac{PV}{PB}} = \sqrt{st}.$$

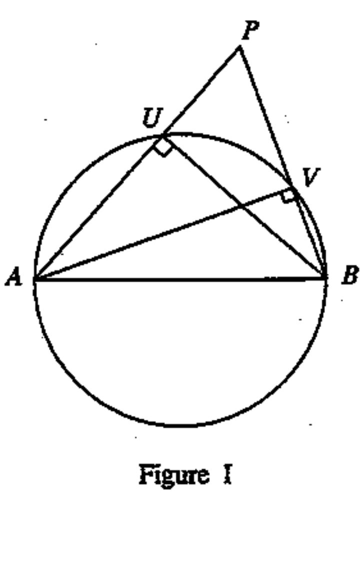

Figure I

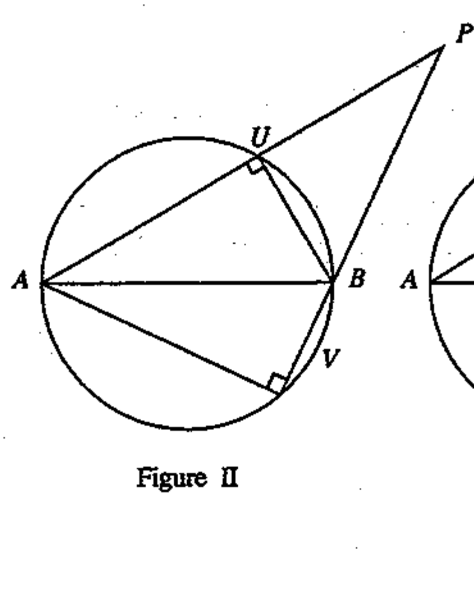

Figure II

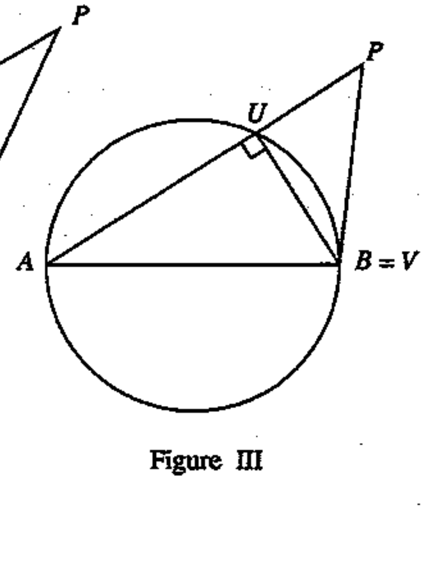

Figure III

Cas 2: Si P est sur Ω (figure IV), alors

$$P = U = V \Rightarrow PU = PV = 0 \Rightarrow s = t = 0.$$

Comme $\angle APB = \pi/2$, $\cos(\angle APB) = 0 = \sqrt{st}$ encore une fois.

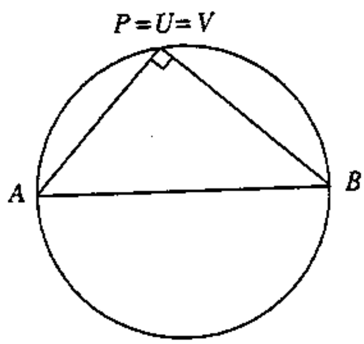

Figure IV

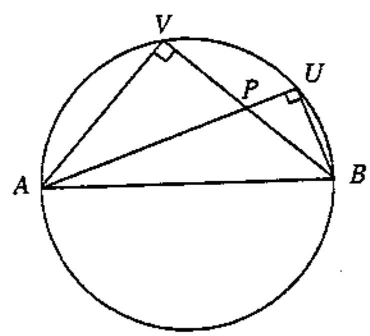

Figure V

Cas 3: Si P est à l'intérieur de Ω (figure V), alors

$$\cos(\angle APB) = \cos(\pi - \angle APV) = -\cos(\angle APV) = -\frac{PV}{PA},$$

et

$$\cos(\angle APB) = \cos(\pi - \angle BPU) = -\cos(\angle BPU) = -\frac{PU}{PB}.$$

Alors donc $\cos(\angle APB) = -\sqrt{\frac{PU}{PA} \cdot \frac{PV}{PB}} = -\sqrt{st}.$

QUESTION 5

Solution 1.

De A on trace une droite ℓ parallèle à BC. On étend maintenant DF et DE pour joindre ℓ en P et Q respectivement (figure I). Des triangles semblables l'on obtient

$$\frac{AP}{BD} = \frac{AF}{FB} \text{ et } \frac{AQ}{CD} = \frac{AE}{EC}$$

ou

$$AP = \frac{AF}{FB} \cdot BD \text{ et } AQ = \frac{AE}{EC} \cdot CD. \qquad (1)$$

Par le théorème de Ceva maintenant on arrive à $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$ et donc

$$\frac{AF}{FB} \cdot BD = \frac{AE}{EC} \cdot CD \qquad (2)$$

De (1) et (2) on obtient $AP = AQ$ et donc $\triangle ADP \simeq \triangle ADQ$ d'où finalement découle $\angle EDH = \angle FDH$.

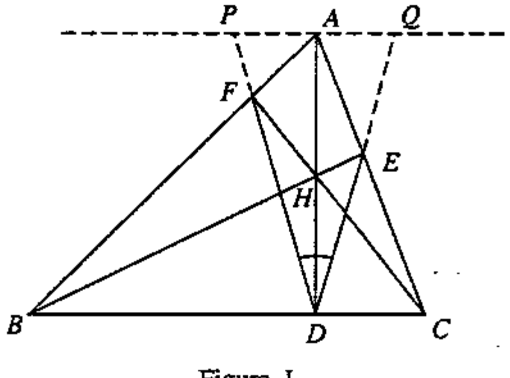

Figure I

Solution 2.

Utilisons des coordonnées cartésiennes de sorte que D soit à $(0,0)$, $A=(0,a)$, $B=(-b,0)$, $C=(c,0)$. Soit $H=(0,h)$, $E=(u,v)$ et $F=(-r,s)$ où les nombres a,b,c,h,v,r,s sont tous positifs (figure II). Il nous suffit de montrer que $\frac{v}{u}=\frac{s}{r}$. Puisque EC et AC sont de même pente, on a $\frac{v}{u-c}=\frac{a}{-c}$. Comme EB et HB sont également de même pente, on obtient aussi $\frac{v}{u+b}=\frac{k}{b}$. Donc

$$\frac{v}{a}=\frac{u-c}{-c}=\frac{-u}{c}+1 \qquad (1)$$

et

$$\frac{v}{h}=\frac{u+b}{b}=\frac{u}{b}+1 \qquad (2)$$

Si on soustrait l'équation (1) de (2) on obtient $v(\frac{1}{h}-\frac{1}{a})=u(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$ et donc

$$\frac{v}{u}=\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{h}-\frac{1}{a}}=\frac{ah(b+c)}{bc(a-h)}.$$

En remplaçant u,v,b et c par $-r,s,-c$ et $-b$ respectivement, on obtient de façon semblable les équations

$$\frac{s}{-r}=\frac{ah(-c-b)}{bc(a-h)} \text{ ou plutôt } \frac{s}{r}=\frac{ah(b+c)}{bc(a-h)}.$$

Donc finalement $\frac{v}{u}=\frac{s}{r}$.

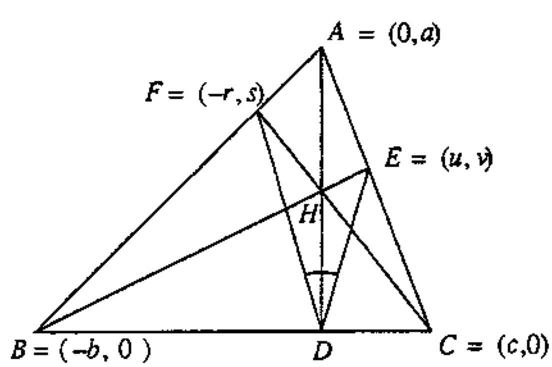

Figure II