l'Olympiade mathématique du Canada 2001

1. **Alain:** «Salut Julie, c'est une équation quadratique intéressante que tu as écrite. Quelles en sont les racines?»
   Julie: «Les racines sont deux entiers positifs. L'une des racines est mon âge, et l'autre racine est l'âge de mon petit frère Gaston.»
   Alain: «C'est très chouette! Voyons si je peux trouver quel âge vous avez, Gaston et toi. Cela ne devrait pas être trop difficile puisque tous les coefficients sont entiers. A propos, je remarque que la somme des trois coefficients est un nombre premier.»
   Julie: «Intéressant. Maintenant, trouve mon âge.»
   Alain: «Je vais plutôt deviner ton âge et remplacer x par ton âge dans ton équation quadratique ... zut, cela me donne -55 et plutôt que 0.»
   Julie: «Oh, laisse moi tranquille!»

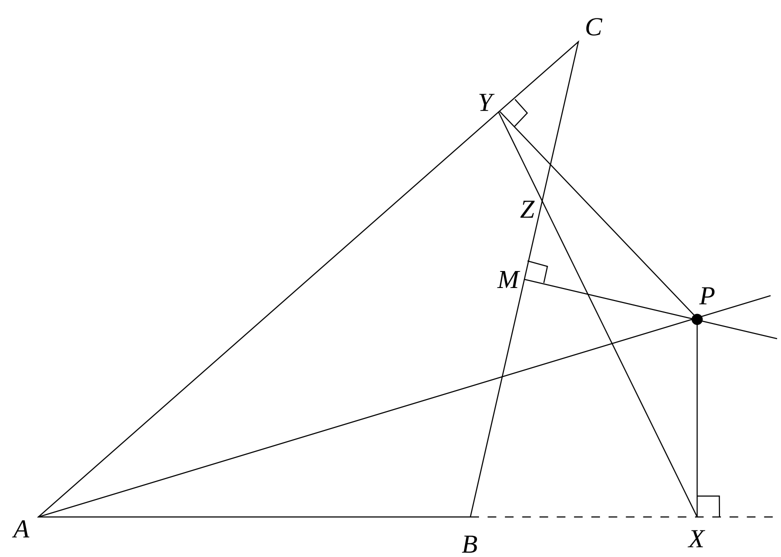
   (a) Prouve que Gaston a deux ans.

   (b) Détermine l'âge de Julie.

2. Il y a un tableau numéroté de -10 à 10 (voir illustration). Chaque case est coloriée en rouge ou en blanc et la somme des nombres sur les cases rouges est n. Marie commence avec un pion sur la case numérotée 0. Ensuite elle lance en l'air une pièce de monnaie non truquée dix fois. Chaque fois qu'elle obtient côté face, elle déplace le pion d'une case vers la droite. Chaque fois qu'elle obtient côté pile, elle déplace le pion d'une case vers la gauche. A la fin des dix lancers, la probabilité pour que le pion soit sur une case rouge est un nombre rationnel de la forme $\frac{a}{b}$. Sachant que $a+b = 2001$ déterminer la plus grande valeur possible de n.

-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

3. Soit ABC un triangle tel que $AC > AB$. Soit P le point d'intersection de la médiatrice de BC et de la bissectrice intérieure de $\angle A$. Construire des points X sur AB (prolongé) et Y sur AC tels que PX soit perpendiculaire à AB et que PY soit perpendiculaire à AC. Soit Z le point d'intersection de XY et BC. Déterminer la valeur de BZ/ZC.



4. Soit n un entier positif. On donne à Isabelle un tableau rectangulaire dont chaque élément est un entier positif. Elle a le choix entre deux opérations:

   (a) Choisir une ligne et multiplier chaque élément de cette ligne par n.

   (b) Choisir une colonne et soustraire n à chaque élément de cette colonne.

   Trouver toutes les valeurs possibles de n pour lesquelles la propriété suivante est vérifiée:

   > Quel que soit le tableau rectangulaire donné, Isabelle peut effectuer une suite finie d'opérations pour créer un tableau dont chaque élément est 0.

5. Soit P_0, P_1, P_2 trois points sur la circonférence d'un cercle de rayon 1, où $P_1P_2 = t < 2$. Pour chaque $i \geq 3$, définir P_i comme le centre du cercle circonscrit au $\triangle P_{i-1}P_{i-2}P_{i-3}$.

   (a) Prouver que les points $P_1, P_5, P_9, P_{13}, \ldots$ sont colinéaires.

   (b) Soit x la distance de P_1 à P_{1001} et soit y la distance de P_{1001} à P_{2001}. Déterminer toutes les valeurs de t pour lesquelles $\sqrt[500]{x/y}$ est un entier.