PROBLÈMES DE JUIN

Veuillez envoyer vos solutions à
Professeur E.J. Barbeau
Department of Mathematics
University of Toronto
Toronto, ON M5S 3G3
au plus tard le **15 août 2001**.

85. Trouvez toutes les paires (a, b) d'entiers positifs telles que $a \neq b$ et le système

$$\cos ax + \cos bx = 0$$

$$a \sin ax + b \sin bx = 0$$

a une solution. Dans chaque cas, déterminez ces solutions.

86. Soit $ABCD$, un quadrilatère convexe tel que $AB = AD$ et $CB = CD$.

(a) Démontrez qu'il est possible d'y inscrire un cercle.

(b) Démontrez qu'on peut y circonscrire un cercle si et seulement si $AB \perp BC$.

(c) Si $AB \perp AC$ et R, r sont les rayons respectifs des cercles circonscrit et inscrit, démontrez que la distance entre les centres des deux cercles est la racine carrée de $R^2 + r^2 - r\sqrt{r^2 + 4R^2}$.

87. Démontrez que si, pour tout entier positif n, les nombres entiers a, b et c satisfont à l'équation

$$\lfloor na \rfloor + \lfloor nb \rfloor = \lfloor nc \rfloor,$$

alors au moins un des nombres a et b doit être entier.

88. Soit I, un intervalle réel de longueur $1/n$. Démontrez que I ne peut contenir plus de $\frac{1}{2}(n+1)$ fractions de la forme p/q, où p et q sont des entiers positifs tels que $1 \leq p \leq n$ et le plus grand diviseur commun de p et q est 1.

89. Démontrez qu'il existe un seul triplet d'entiers positifs a, b, c supérieurs à 1 tel que $ab+1$ est un multiple de c, $bc + 1$ est un multiple de a et $ac + 1$ est un multiple de b.

90. Soit m, un entier positif, et $f(m)$ la plus petite valeur n pour laquelle l'affirmation suivante est vraie:

étant donné n'importe quel ensemble de n entiers, il est possible d'y choisir m entiers dont la somme est divisible par m

Déterminez $f(m)$.