B1. Arthur se rend chez David en voiture et veut arriver à une certaine heure. S'il conduit à une vitesse de 60 km/h, il arrivera 5 minutes en retard. S'il conduit à une vitesse de 90 km/h, il arrivera 5 minutes en avance. S'il conduit à une vitesse de n km/h, il arrivera exactement à l'heure. Quelle est la valeur de n?

B2. Les entiers a, b, c, d, et e possèdent les trois caractéristiques suivantes :

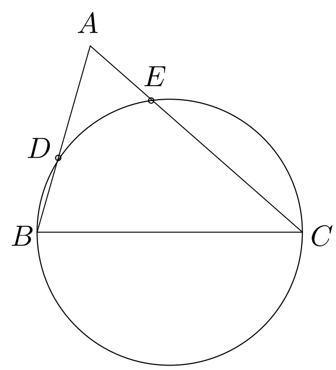
(i) $2 \leq a < b < c < d < e < 100$

(ii) $\text{pgcd}(a, e) = 1$

(iii) a, b, c, d, e forment une suite géométrique.

Quelle est la valeur de c?

B3. Dans la figure ci-dessous, BC est un diamètre du cercle, où $BC = \sqrt{901}$, $BD = 1$, et $DA = 16$. Si $EC = x$, quelle est la valeur de x?

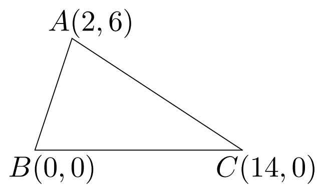


B4. Un groupe de n amis a passé un examen de mathématiques comprenant 8 problèmes à réponse courte S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, et 4 problèmes à développement F_1, F_2, F_3, F_4. Chaque membre du groupe a répondu correctement à exactement 11 des 12 problèmes. On forme un tableau de 8×4 carrés. Dans le carré situé à la i^{e} rangée et la j^{e} colonne, on inscrit le nombre de personnes qui ont correctement résolu à la fois les problèmes S_i et F_j. Si la somme des 32 nombres du tableau est 256, quelle est la valeur de n?

	F_1	F_2	F_3	F_4
S_1				
S_2				
S_3				
S_4				
S_5				
S_6				
S_7				
S_8				

Problèmes à développement

C1. ABC est un triangle dont les coordonnées sont $A = (2, 6)$, $B = (0, 0)$, et $C = (14, 0)$.



(a) Soit P le point médian du côté AB. Déterminer l'équation de la droite perpendiculaire à AB qui passe par P.

(b) Soit Q le point sur la droite BC où PQ est perpendiculaire à AB. Déterminer la longueur du segment AQ.

(c) Il y a un cercle (unique) qui passe par les points A, B, et C. Déterminer le rayon de ce cercle.

C2. Charlotte passe un examen comprenant 100 questions; la réponse à chaque question est VRAI ou FAUX. L'enseignante de Charlotte indique que pour chaque bloc de cinq questions *consécutives* de l'examen, la réponse à *exactement* trois d'entre elles est VRAI. Juste avant le début de l'examen, l'enseignante chuchote à Charlotte que la réponse à la première et à la dernière question est FAUX.

(a) Déterminer le nombre de questions pour lesquelles la réponse est VRAI.

(b) Quelle est la bonne réponse à la sixième question de l'examen?

(c) Expliquer comment Charlotte peut répondre correctement aux 100 questions de l'examen.

C3. Soit n un entier positif. Une rangée de $n + 1$ carrés est numérotée de gauche à droite $0, 1, 2, \ldots, n$, tel qu'illustré ci-dessous.

0	1	2	$\cdots$	n

Deux grenouilles appelées Alphonse et Béryl commencent une course à partir du carré 0. Chaque seconde, Alphonse et Béryl font un saut vers la droite selon les règles suivantes : s'il y a au moins huit carrés à la droite d'Alphonse, alors ce dernier doit sauter huit carrés vers la droite; sinon, il saute d'un carré vers la droite. S'il y a au moins sept carrés à la droite de Béryl, alors elle doit sauter sept carrés vers la droite; sinon, elle saute d'un carré vers la droite. $A(n)$ et $B(n)$ désignent respectivement le nombre de secondes qu'il faut à Alphonse et à Béryl pour atteindre le carré n. Par exemple, $A(40) = 5$ et $B(40) = 10$.

(a) Déterminer l'entier $n > 200$ pour lequel $B(n) < A(n)$.

(b) Déterminer le plus grand entier n pour lequel $B(n) \leq A(n)$.

C4. Soit $f(x) = x^2 - ax + b$, où a et b sont deux entiers positifs.

(a) Supposons que $a = 2$ et que $b = 2$. Déterminer l'ensemble des racines réelles de $f(x) - x$ et l'ensemble des racines réelles de $f(f(x)) - x$.

(b) Déterminer le nombre de paires d'entiers positifs (a, b) avec $1 \leq a, b \leq 2011$ pour lesquelles chaque racine de $f(f(x)) - x$ est un entier.

Financière Sun Life

DOCM 2011 - Solutions

A1. Si r est un nombre tel que $r^2 - 6r + 5 = 0$, quelle est la valeur de $(r-3)^2$?

Solution : La réponse est 4.

Solution 1: Notons que $(r-3)^2 = r^2-6r+9$. Étant donné que $r^2-6r+5 = 0$, $r^2-6r+9 = 4$. Par conséquent, la réponse est 4.

Solution 2 : L'équation quadratique $r^2 - 6r + 5$ se factorise sous la forme :

$$(r-1)(r-5).$$

Par conséquent, $r = 1$ ou $r = 5$. Si $r = 1$, alors $(r-3)^2 = (-2)^2 = 4$. Si $r = 5$, alors $(r-3)^2 = (2)^2 = 4$. Dans les deux cas, $(r-3)^2 = 4$.

Solution 3 : En complétant le carré de $r^2 - 6r + 5$, nous obtenons $r^2 - 6r + 5 = (r-3)^2 - 4$. Étant donné que $r^2 - 6r + 5 = 0$, $(r-3)^2 - 4 = 0$. Donc, $(r-3)^2 = 4$.

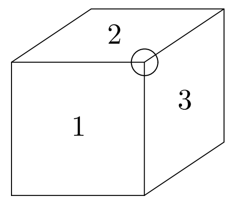
A2. Carmen choisit quatre nombres de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ de sorte que la somme de ces quatre nombres est 11. Si ℓ est le *plus grand* de ces quatre nombres, quelle est la valeur de ℓ?

Solution : La réponse est 5.

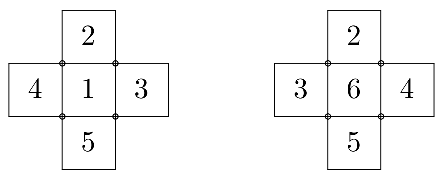
Solution 1 : Notons que la somme des quatre plus petits entiers de l'ensemble est égale à $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Donc, $1 + 2 + 3 + 5 = 11$. Dans le premier membre de la somme, le plus grand des entiers positifs est 5. Par conséquent, $\ell = 5$.

Solution 2 : Étant donné que ℓ est plus grand que quatre des nombres compris dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\ell \geq 4$. Par conséquent, l est égal à un des nombres suivants : $4, 5, 6$ ou 7. Si $\ell = 7$, alors la plus petite somme possible de quatre des nombres de l'ensemble est $1 + 2 + 3 + 7 = 13 > 11$. Par conséquent, $\ell \neq 7$. De même, si $\ell = 6$, alors la plus petite somme possible de quatre des nombres de l'ensemble est $1 + 2 + 3 + 6 = 12 > 11$. De même, $\ell \neq 4$. Par conséquent, $\ell = 5$.

A3. Les nombres $1, 2, 3, 4, 5, 6$ sont inscrits sur les faces d'un cube de manière à ce que la somme des nombres sur chaque paire de faces opposées soit 7. Pour chacun des huit coins du cube, on multiplie les trois nombres qui figurent sur les faces adjacentes du coin en question et on prend cette valeur en note. (Dans le diagramme, la valeur qui correspond au coin indiqué est $1 \times 2 \times 3 = 6$.) Quelle est la somme des huit valeurs attribuées aux coins du cube?



Solution : La réponse est 343.



Solution 1 : Sur la figure de gauche, on peut voir les faces et les coins adjacents au côté du dé sur lequel est inscrit le nombre 1. Sur celle de droite, on peut voir le côté opposé, sur lequel est inscrit le nombre 6, et qui est adjacent aux quatre autres coins.

Nous déterminons les huit combinaisons possibles et calculons la valeur de chacune d'elles; ensuite, nous calculons la somme des huit valeurs obtenues. Les huit combinaisons de trois nombres entiers correspondant aux huit coins du dé sont les suivantes :

$$(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (6, 2, 3), (6, 2, 4), (6, 3, 5), (6, 4, 5).$$

Nous obtenons les huit valeurs suivantes :

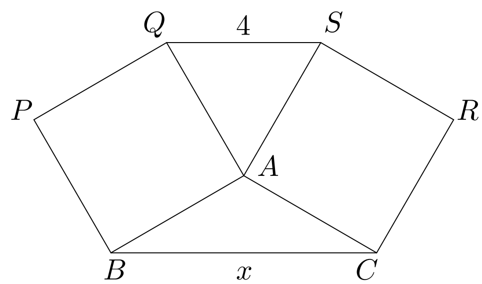
$$\begin{array}{rcr} 1 \times 2 \times 3 & = & 6 \\ 1 \times 2 \times 4 & = & 8 \\ 1 \times 3 \times 5 & = & 15 \\ 1 \times 4 \times 5 & = & 20 \\ 6 \times 2 \times 3 & = & 36 \\ 6 \times 2 \times 4 & = & 48 \\ 6 \times 3 \times 5 & = & 90 \\ 6 \times 4 \times 5 & = & 120 \end{array}$$

La somme de ces huit entiers positifs est 343.

Solution 2 : Étant donné que, pour chaque coin, nous ne pouvons pas avoir deux nombres dont la somme est égale à 7, la valeur totale obtenue dans la solution 1 peut se calculer de la manière suivante :

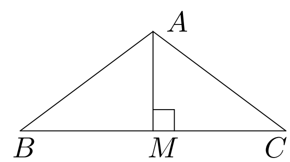
$$(1 + 6)(2 + 5)(3 + 4) = 7^3 = 343.$$

A4. Dans la figure ci-dessous, $AQPB$ et $ASRC$ sont des carrés et AQS est un triangle équilatéral. Si $QS = 4$ et $BC = x$, quelle est la valeur de x?



Solution : La réponse est $4\sqrt{3}$.

Solution 1 : Étant donné que le triangle ΔAQS est un triangle équilatéral, $AQ = QS = AS$. Étant donné que $QS = 4$, $AQ = AS = 4$. Étant donné que $AQPB$ et $ASRC$ sont des carrés, $AB = AQ = 4$ et $AC = AS = 4$. Étant donné que le triangle ΔAQS est un triangle équilatéral, $\angle QAS = 60°$. Par conséquent, $\angle BAC = 360° - 90° - 90° - \angle QAS = 120°$.



À partir du point A, traçons une droite perpendiculaire au côté BC; cette droite coupe le segment BC au point M. Ensuite, par symétrie, M est le point médian du côté BC et l'angle $\angle BAM = \angle CAM = \angle BAC/2 = 120/2 = 60°$. Par conséquent, le triangle ΔABM est un triangle rectangle dont les angles font $30°$, $60°$ et $90°$. Donc,

$$\frac{BM}{BA} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

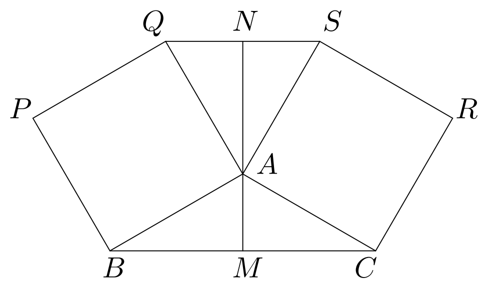
Nous obtenons alors $BM = 4\sqrt{3}/2 = 2\sqrt{3}$. De même, $CM = 2\sqrt{3}$. Par conséquent, $BC = BM + CM = 4\sqrt{3}$.

Solution 2 : Dans la solution 1, $AB = AC = 4$ et $\angle BAC = 120°$. Selon la loi des cosinus, nous avons :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC} \\ &= \sqrt{4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 120°} \\ &= \sqrt{32 - 32 \cdot (-1/2)} = \sqrt{32 + 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $x = 4\sqrt{3}$.

Solution 3 :



Soit M, N étant, respectivement, les points médians des segments BC et QS. Par symétrie, les points M, A, N sont colinéaires et la droite MN est perpendiculaire aux droites QS et BC. Dans la solution 1, $\angle QAS = 60°$ et $\angle BAC = 120°$. Par conséquent, par symétrie, $\angle QAN = 30°$ et $\angle BAM = 60°$. Étant donné que le triangle ΔAQS est un triangle équilatéral, $\angle AQN = 60°$ et $\angle ABM = 180° - \angle BAM - \angle AMB = 180° - 60° - 90° = 30°$. Étant donné que $AB = AQ$, les triangles ΔANQ et ΔBMA sont isométriques. Par conséquent, $BM = AN$. Selon le théorème de Pythagore,

$$BM = AN = \sqrt{AQ^2 - QN^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Donc, $x = BC = 2 \cdot BM = 2\sqrt{3}$.

B1. Arthur se rend chez David en voiture et veut arriver à une certaine heure. S'il conduit à une vitesse de 60 km/h, il arrivera 5 minutes en retard. S'il conduit à une vitesse de 90 km/h, il arrivera 5 minutes en avance. S'il conduit à une vitesse de n km/h, il arrivera exactement à l'heure. Quelle est la valeur de n?

Solution La réponse est 72.

Solution 1 : Soit d la distance, en km, entre l'endroit où se trouve Arthur et la maison de David, et t le temps, en heures, qu'il faut à Arthur pour se rendre chez David en conduisant à une vitesse de n km/h. Si sa vitesse est de 60 km/h, Arthur conduira pendant t heures + 5 minutes $= t + 5/60$ heures. Si sa vitesse est de 90km/h, Arthur conduira pendant t heures - 5 minutes $= t - 5/60$ heures. Par conséquent, en appliquant la formule *distance* = *vitesse* × *temps*, nous obtenons :

$$d = nt = 60(t + 5/60) = 90(t - 5/60). \tag{1}$$

l'équation se simplifie de la manière suivante :

$$d = nt = 60t + 5 = 90t - \frac{15}{2}, \quad (1)$$

Nous déterminons d'abord la valeur de t. En utilisant l'équation la plus à droite (1), nous obtenons $30t = 5 + \frac{15}{2} = \frac{25}{2}$. Par conséquent, $t = 25/60$. Donc, $d = 60t + 5 = 60(25/60) + 5 = 30$. Par conséquent, $n = d/t = 30/(25/60) = 30 \times 60/25 = 72$ km/h.

Solution 2 : Soit d la distance entre l'endroit où se trouve Arthur et la maison de David. Notons que le temps qu'il faut à Arthur pour se rendre à la maison de David, à une vitesse de n km/h, correspond à la *moyenne* du temps que cela lui prend pour parcourir cette distance à une vitesse de 60 et 90 km/h, respectivement. Donc,

$$\frac{d}{n} = \frac{\frac{d}{60} + \frac{d}{90}}{2}.$$

En divisant les deux côtés par d et en multipliant les résultats ensemble par multiplication croisée, nous obtenons

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{60} + \frac{1}{90} = \frac{5}{180}.$$

Ce qui donne, $5n = 360$. Donc, $n = 72$.

B2. Les entiers a, b, c, d, et e possèdent les trois caractéristiques suivantes :

(i) $2 \leq a < b < c < d < e < 100$

(ii) $\text{pgcd}(a, e) = 1$

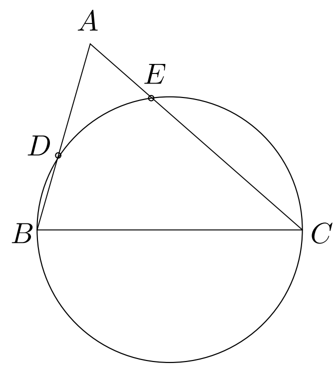
(iii) a, b, c, d, e forment une suite géométrique.

Quelle est la valeur de c?

Solution : La réponse est 36.

Soit r le rapport commun de la suite géométrique a, b, c, d, e. Étant donné que $a < b < c < d < e$, $r > 1$. Alors $a = a, b = ar, c = ar^2, d = ar^3, e = ar^4$. Étant donné que a, e n'ont pas de facteurs communs et que $a > 1$, r n'est pas un entier. Soit x/y étant le rapport commun, où x, y sont des entiers positifs et $\text{pgcd}(x, y) = 1$. Étant donné que $r > 1$ et n'est pas un entier, $x > y > 1$. Par conséquent, $b = ax/y, c = ax^2/y^2, d = ax^3/y^3$ et $e = ax^4/y^4$. Étant donné que e est un entier et $\text{pgcd}(x, y) = 1$, a est divisible par y^4. Alors $a = ky^4$ pour un entier positif donné k. Alors $a = ky^4, b = kxy^3, c = kx^2y^2, d = kx^3y, e = kx^4$. Étant donné que $\text{pgcd}(a, e) = 1$, $k = 1$. Donc, $a = y^4$ et $e = x^4$. Étant donné que $2 \leq a < e < 100$ et $3^4 < 100 < 4^4$, $2 \leq y < x \leq 3$, ce qui implique que $x = 3$ et $y = 2$. Alors $c = kx^2y^2 = 1 \cdot 3^2 \cdot 2^2 = 6^2 = 36$.

B3. Dans la figure ci-dessous, BC est un diamètre du cercle, où $BC = \sqrt{901}$, $BD = 1$, et $DA = 16$. Si $EC = x$, quelle est la valeur de x?



Solution : La réponse est 26.

Solution 1 : Étant donné que BC est le diamètre du cercle, $\angle BDC = \angle BEC = 90°$. En appliquant le théorème de Pythagore, nous obtenons :

$$CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{901 - 1^2} = \sqrt{900} = 30.$$

Étant donné que $\angle BDC = 90°$, $\angle ADC = 90°$. Ensuite, en appliquant le théorème de Pythagore, nous obtenons :

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{16^2 + 30^2} = 34.$$

Étant donné que $x = CE$, $AE = 34 - x$. Nous devons déterminer la valeur de x. En appliquant le théorème de Pythagore, nous obtenons : $BE = \sqrt{BA^2 - AE^2} = \sqrt{BC^2 - CE^2}$. Ce qui nous donne,

$$BA^2 - AE^2 = BC^2 - CE^2.$$

Notons que $BA = BD + DA = 16 + 1 = 17$. Par conséquent,

$$\begin{array}{rrcl} & 17^2 - (34-x)^2 & = & 901 - x^2 \\ \Rightarrow & x^2 + 289 & = & (x-34)^2 + 901 \\ \Rightarrow & x^2 + 289 & = & x^2 - 68x + 1156 + 901 \\ \Rightarrow & 68x & = & 1768. \end{array}$$

Par conséquent, $x = 1768/68 = (17 \times 104)/(17 \times 4) = 104/4 = 26$. Ce qui nous donne, $EC = 26$.

Solution 2 : Comme dans la solution 1, $\angle BDC = \angle BEC = 90°$, $CD = 30$ et $AC = 34$. En calculant l'aire du triangle ΔABC de deux manières différentes, nous obtenons :

$$\text{l'aire du triangle } \Delta ABC = \frac{1}{2} \times AB \times DC = \frac{1}{2} \times AC \times BE.$$

Par conséquent, $AB \cdot DC = AC \cdot BE$. Ce qui nous donne, $17 \cdot 30 = 34 \cdot BE$. Par conséquent, $30 = 2 \cdot BE$. De même, $BE = 15$. Par conséquent, en appliquant le théorème de Pythagore :

$$EC = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \sqrt{901 - 15^2} = \sqrt{676} = 26.$$

Solution 3 : Comme dans la solution 1, $\angle BDC = \angle BEC = 90°$, $CD = 30$ et $AC = 34$. Comparons les triangles ΔADC et ΔAEB. Notons que $\angle ADC = \angle AEB = 90°$ et $\angle DAC = \angle EAB$. Par conséquent, le triangle ΔADC est égal au triangle ΔAEB. Donc,

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}.$$

Par conséquent, $AD \cdot AB = AE \cdot AC$. Notons que $AB = AD + BD = 16 + 1 = 17$. Donc, $16 \times 17 = AE \cdot 34$. Par conséquent, $AE = 8$. Nous pouvons alors conclure que $EC = AC - AE = 34 - 8 = 26$.

B4. Un groupe de n amis a passé un examen de mathématiques comprenant 8 problèmes à réponse courte S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, et 4 problèmes à développement F_1, F_2, F_3, F_4. Chaque membre du groupe a répondu correctement à exactement 11 des 12 problèmes. On forme un tableau de 8×4 carrés. Dans le carré situé à la i^{e} rangée et la j^{e} colonne, on inscrit le nombre de personnes qui ont correctement résolu à la fois les problèmes S_i et F_j. Si la somme des 32 nombres du tableau est 256, quelle est la valeur de n?

	F_1	F_2	F_3	F_4
S_1				
S_2				
S_3				
S_4				
S_5				
S_6				
S_7				
S_8				

Solution : La réponse est 10.

Solution 1 : La somme de tous les nombres inscrits est la somme du nombre de combinaisons de la forme (S_i, F_j) correspondant aux problèmes que chaque élève a résolus. De cette somme, le nombre de problèmes résolus par chaque élève correspond au produit du nombre de problèmes à réponse courte par le nombre de ceux à développement qu'il a résolus. Étant donné que chaque élève a résolu 11 problèmes, chaque élève a résolu 8 problèmes à réponse courte et 3 problèmes à développement, ou bien 7 problèmes à réponse courte et 4 problèmes à développement. Soit x le nombre d'élèves ayant résolu 8 problèmes à réponse courte et 3 problèmes à développement, et y le nombre d'élèves ayant résolu 7 problèmes à réponse courte et 4 problèmes à développement. Alors la somme des nombres inscrits est : $8 \times 3 \times x + 7 \times 4 \times y = 256$. Donc, $24x + 28y = 256$. En divisant les deux côtés par 4, on obtient $6x + 7y = 64$. Notons que $0 \leq x \leq 10$. En substituant à x chacune de ses valeurs respectives, nous obtenons, pour y, les valeurs suivantes :

x	y
0	64/7
1	58/7
2	52/7
3	46/7
4	40/7
5	34/7
6	4
7	22/7
8	16/7
9	10/7
10	4/7

Notons que seule la combinaison $(x, y) = (6, 4)$ donne des entiers non négatifs pour les valeurs de x et y. Donc, le nombre d'élèves est $x + y = 6 + 4 = 10$.

Solution 2 : Étant donné que chaque personne a résolu 11 des 12 problèmes, il reste donc un problème qu'elle n'a pas pu résoudre. Soit s_i le nombre de personnes qui n'ont pas pu résoudre le problème S_i (pour $i = 1, \ldots 8$), et soit f_j le nombre de personnes qui n'ont pas pu résoudre le problème F_j (pour $j = 1, \ldots 4$).

Comme dans la solution 1, x est le nombre d'élèves qui ont résolu 8 problèmes à réponse courte et 3 problèmes à développement, et y est le nombre d'élèves qui ont résolu 7 problèmes à réponse courte et 4 problèmes à développement. Par définition, $y = s_1 + s_2 + ... + s_8$ et $x = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ et $n = x + y$.

Considérons l'entrée dans la i^e rangée et j^e colonne de notre tableau de 8×4 carrés. Ce nombre doit être $n - s_i - f_j$. En additionnant les 32 entrées, nous obtenons : $256 = 32n - 4(s_1 + ... + s_8) - 8(f_1 + ... + f_4) = 32n - 4y - 8x = 32(x + y) - 4y - 8x = 24x + 28y$. Par conséquent, $24x + 28y = 256$. Nous obtenons le même résultat que dans la solution 1.

Solution 3 : Soit s_i, f_j comme dans la solution 2. Alors

$$n = (s_1 + s_2 + \ldots + s_8) + (f_1 + f_2 + f_3 + f_4).$$

Donc, comme dans la solution 2, nous avons :

$$\begin{aligned} 256 &= 32n - 4(s_1 + s_2 + \ldots + s_8) - 8(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) \\ &= 28n - 4(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) \end{aligned}$$

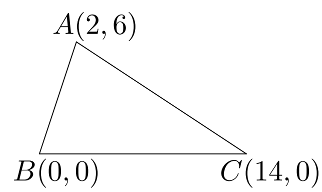
Par conséquent, $64 = 7n - (f_1 + f_2 + f_3 + f_4)$. Donc, $n \geq 10$. Mais notons que si $n \geq 11$, alors

$$(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) = 7n - 64 = n + (6n - 64) > n.$$

Étant donné que $f_1+f_2+f_3+f_4$ est le nombre de personnes qui n'ont pas résolu un problème à développement, $f_1+f_2+f_3+f_4$ est le nombre maximum de personnes comprises dans le groupe, qui est n. Ce qui contredit $f_1+f_2+f_3+f_4>n$. Donc, $n \ngeq 11$. Conjointement avec $n \geq 10$, cela donne $n=10$.

1 Problèmes à développement

C1. ABC est un triangle dont les coordonnées sont $A = (2, 6)$, $B = (0, 0)$, et $C = (14, 0)$.



(a) Soit P le point médian du côté AB. Déterminer l'équation de la droite perpendiculaire à AB qui passe par P.

(b) Soit Q le point sur la droite BC où PQ est perpendiculaire à AB. Déterminer la longueur du segment AQ.

(c) Il y a un cercle (unique) qui passe par les points A, B, et C. Déterminer le rayon de ce cercle.

Solution :

(a) La réponse est $y = -1/3 \cdot x + 10/3$ ou $x + 3y = 10$.

Le point médian du côté AB a les coordonnées suivantes :

$$P = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = (1, 3).$$

La pente AB est égale à $6/2 = 3$. Par conséquent, la pente de la droite perpendiculaire au segment AB est égale à $-1/3$. Donc, l'équation de la droite perpendiculaire à AB qui passe par P est la suivante :

$$y - 3 = \frac{-1}{3}(x - 1).$$

Ce qui est équivalent à :

$$y = \frac{-1}{3}x + \frac{10}{3}.$$

En réécrivant cette équation, on obtient :

$$x + 3y = 10.$$

(b) La réponse est 10.

Solution 1 : La droite BC a pour ordonnée $y = 0$. Étant donné que le point Q est sur la droite BC, il a pour ordonnée $y = 0$. Étant donné que le point Q est également sur la droite passant par P et qui est perpendiculaire au côté AB, cette droite a pour équation :

$x + 3y = 10$; dans l'équation $x + 3y = 10$, substituons 0 à y pour obtenir $x = 10$. Donc, $Q = (10, 0)$. Étant donné que $A = (2, 6)$, en appliquant le théorème de Pythagore :

$$AQ = \sqrt{(10-2)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$$

Solution 2 : Comme dans la solution 1, $Q = (10, 0)$. Étant donné que le point Q se trouve sur la bissectrice perpendiculaire à AB, $QA = QB$. Étant donné que $Q = (10, 0)$ et $B = (0, 0)$, $QA = QB = 10$.

(c) La réponse est $5\sqrt{2}$ ou $\sqrt{50}$.

Solution 1 : Soit $O = (x, y)$ le centre du cercle. Étant donné que le point Q se trouve sur la bissectrice perpendiculaire à BC, $x = (0 + 14)/2 = 7$. Étant donné que le point Q se trouve sur la droite perpendiculaire à AB qui passe par le point P et que l'équation de la droite qui passe par P et qui est perpendiculaire à AB est $x + 3y = 10$, substituons 7 à x dans $x + 3y = 10$, ce qui nous donne $y = 1$. Donc, le centre du cercle a pour coordonnées $(7, 1)$. Le rayon du cercle est égal à la distance entre le point O et n'importe lequel des points A, B, C. Pour aller au plus simple, nous calculons la longueur de OB, étant donné que $B = (0, 0)$. En appliquant le théorème de Pythagore, le rayon du cercle est $OB = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Solution 2 : Nous allons appliquer la propriété suivante d'un triangle; soit a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle, R le rayon du cercle circonscrit au triangle et K l'aire du triangle. Ensuite, les valeurs a, b, c, R, K sont définies par la relation suivante :

$$K = \frac{abc}{4R}.$$

Dans ce triangle, $AB = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, $BC = 14$ et $CA = \sqrt{(14-2)^2 + 6^2} = \sqrt{180} = 3\sqrt{20}$. Notons que

$$K = \frac{1}{2} \times BC \times \{\text{la hauteur par rapport au côté BC}\} = \frac{1}{2} \times 14 \times 6 = 42.$$

Par conséquent,

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4K} = \frac{2\sqrt{10} \times 14 \times 3\sqrt{20}}{4 \times 42} = \frac{60\sqrt{2} \times 14}{4 \times 42} = 5\sqrt{2}.$$

C2. Charlotte passe un examen comprenant 100 questions; la réponse à chaque question est VRAI ou FAUX. L'enseignante de Charlotte indique que pour chaque bloc de cinq questions *consécutives* de l'examen, la réponse à *exactement* trois d'entre elles est VRAI. Juste avant le début de l'examen, l'enseignante chuchote à Charlotte que la réponse à la première et à la dernière question est FAUX.

(a) Déterminer le nombre de questions pour lesquelles la réponse est VRAI.

(b) Quelle est la bonne réponse à la sixième question de l'examen?

(c) Expliquer comment Charlotte peut répondre correctement aux 100 questions de l'examen.

Solution 1 : (Approche algébrique :) Pour chacune des valeurs de $1 \leq i \leq 100$ questions, soit $x_i = 1$ si la réponse à la i^{e} question est VRAI, et $x_i = 0$ si la réponse à la i^{e} question est FAUX. Étant donné que la réponse à la première et à la dernière question est FAUX, nous devons avoir $x_1 = 0$ et $x_{100} = 0$. De plus, nous savons que pour chaque bloc de cinq questions consécutives de l'examen, la réponse à exactement trois d'entre elles est VRAI. Par conséquent, nous avons l'identité suivante :

$$x_j + x_{j+1} + x_{j+2} + x_{j+3} + x_{j+4} = 3$$

pour toutes les valeurs de $1 \leq j \leq 96$.

Solution :

(a) La réponse est 60.

Répartissez les 100 problèmes par groupes de 5, à savoir $1-5, 6-10, 11-15, \ldots, 91-95, 96-100$. Étant donné qu'il y a 100 problèmes et cinq problèmes par groupe, que dans chaque bloc de cinq problèmes consécutifs il y a exactement trois problèmes pour lesquels la réponse est VRAI, chaque groupe comprend trois problèmes pour lesquels la réponse est VRAI. Étant donné qu'il y a 20 groupes, il y a $20 \times 3 = 60$ problèmes de l'examen pour lesquels la réponse est VRAI.

(b) Considérons les problèmes $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Parmi les problèmes $1-5$, il y a exactement trois problèmes pour lesquels la réponse est VRAI. Étant donné que la réponse au premier problème est FAUX, parmi les problèmes $2-5$, il y a exactement trois problèmes pour lesquels la réponse est VRAI. Considérons maintenant le problème 6. Étant donné que parmi les problèmes $2-6$ il y a exactement trois problèmes pour lesquels la réponse est VRAI, et que parmi les problèmes $2-5$ il y a également 3 problèmes pour lesquels la réponse est VRAI, la réponse au problème 6 est FAUX.

(c) **Solution 1:** Nous supposons que la réponse au problème n est la même que pour le problème $n+5$. Considérons les problèmes $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$. Notons que, parmi les problèmes $n, n+1, n+2, n+3, n+4$, il y a trois problèmes pour lesquels la réponse est VRAI, et que, parmi les problèmes $n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$, il y a trois problèmes pour lesquels la réponse est VRAI. Notons que, parmi les problèmes $n+1, n+2, n+3, n+4$, il y a 2 ou 3 problèmes pour lesquels la réponse est VRAI. Dans le premier cas, pour les problèmes n et $n+5$ la réponse est VRAI. Dans le deuxième cas, pour les problèmes n et $n+5$ la réponse est FAUX. Dans les deux cas, la réponse est la même pour les problèmes n et $n+5$.

Dans cet énoncé, la réponse est la même pour les problèmes $\{1, 6, 11, 16, \ldots, 91, 96\}$. Il en est de même pour les problèmes $\{2, 7, 12, 17, \ldots, 92, 97\}, \{3, 8, 13, 18, \ldots, 93, 98\}, \{4, 9, 14, 19, \ldots, 94, 99\}$ et $\{5, 10, 15, 20, \ldots, 95, 100\}$. Pour chacun de ces cinq groupes de problèmes, si nous pouvons déterminer la réponse pour un des problèmes compris dans un groupe, nous pouvons déterminer la réponse pour chacun des problèmes compris dans le groupe. Étant donné que pour le problème 1 la réponse est FAUX, pour tous les problèmes $\{1, 6, 11, 16, \ldots, 91, 96\}$ la réponse est FAUX. Étant donné que pour le problème 100 la réponse est FAUX, alors pour les problèmes $\{5, 10, 15, 20, \ldots, 95, 100\}$ la réponse est également FAUX. Étant donné que pour les problème 1 et 5 la réponse est FAUX, et qu'il y a exactement trois problèmes, $1, 2, 3, 4, 5$, pour lesquels la réponse est VRAI, pour les problèmes $2, 3, 4$ la réponse est VRAI. Par conséquent, pour tous les autres problèmes $\{2, 7, 12, 17, \ldots, 92, 97\}, \{3, 8, 13, 18, \ldots, 93, 98\}, \{4, 9, 14, 19, \ldots, 94, 99\}$ la réponse est VRAI.

Solution 2 : Comme dans la solution 1, pour les problèmes $\{1, 6, 11, \ldots, 96\}$ et $\{5, 10, 15, \ldots, 100\}$ la réponse est FAUX. Pour 40 problèmes, la réponse est FAUX. Pour la partie (a), pour 60 des 100 problèmes la réponse est VRAI. Par conséquent, pour les 60 autres problèmes, $\{2, 7, \ldots, 97\}$, $\{3, 8, \ldots, 98\}$ et $\{4, 9, \ldots, 99\}$, la réponse est FAUX.

Commentaire Une solution similaire à cette solution consiste à définir une variable x_i pour le problème i, où $x_i = 1$ si la réponse au problème i est VRAI et $x_i = 0$ si la réponse au problème i est FAUX. Ensuite, en se fondant sur cet énoncé, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$x_j + x_{j+1} + x_{j+2} + x_{j+3} + x_{j+4} = 3, \quad toutes les valeurs de \forall 1 \leq j \leq 96$$

et $x_1 = 0$ et $x_{100} = 0$. Charlotte doit déterminer toutes les valeurs de x_i pour lesquelles $1 \leq i \leq 100$. Étant donné que $x_j \in \{0, 1\}$, par résolution de ce système d'équations, on obtient :

$$\begin{aligned}
x_1 = x_6 = x_{11} = x_{16} = \ldots = x_{91} = x_{96} &= 0 \\
x_2 = x_7 = x_{12} = x_{17} = \ldots = x_{92} = x_{97} &= 1 \\
x_3 = x_8 = x_{13} = x_{18} = \ldots = x_{93} = x_{98} &= 1 \\
x_4 = x_9 = x_{14} = x_{19} = \ldots = x_{94} = x_{99} &= 1 \\
x_5 = x_{10} = x_{15} = x_{20} = \ldots = x_{95} = x_{100} &= 0
\end{aligned}$$

C3. Soit n un entier positif. Une rangée de $n+1$ carrés est numérotée de gauche à droite $0, 1, 2, \ldots, n$, tel qu'illustré ci-dessous.

0	1	2	$\cdots$	n

Deux grenouilles appelées Alphonse et Béryl commencent une course à partir du carré 0. Chaque seconde, Alphonse et Béryl font un saut vers la droite selon les règles suivantes : s'il y a au moins huit carrés à la droite d'Alphonse, alors ce dernier doit sauter huit carrés vers la droite; sinon, il saute d'un carré vers la droite. S'il y a au moins sept carrés à la droite de Béryl, alors elle doit sauter sept carrés vers la droite; sinon, elle saute d'un carré vers la droite. $A(n)$ et $B(n)$ désignent respectivement le nombre de secondes qu'il faut à Alphonse et à Béryl pour atteindre le carré n. Par exemple, $A(40) = 5$ et $B(40) = 10$.

(a) Déterminer l'entier $n > 200$ pour lequel $B(n) < A(n)$.

(b) Déterminer le plus grand entier n pour lequel $B(n) \leq A(n)$.

Solution 1 : Notons que si nous écrivons $n = 8q_1 + r_1$ où q_1, r_1 sont des entiers non négatifs et $0 \leq r_1 < 8$, alors Alphonse doit faire q_1 sauts de 8 carrés et faire r_1 sauts de 1 carré. Alors, le nombre de sauts que doit faire Alphonse est $A(n) = q_1 + r_1$. De même, si nous écrivons $n = 7q_2 + r_2$ où q_2, r_2 sont des entiers non négatifs et $0 \leq r_2 < 7$, alors $B(n) = q_2 + r_2$.

(a) Étant donné que le saut que fait Alphonse, qui est de 8 carrés, est supérieur à celui de Béryl, qui est de 7 carrés, pour que Béryl finisse plus vite qu'Alphonse, n doit être un entier tel que Béryl fasse très peu de sauts de 1 carré et qu'Alphonse fasse beaucoup de sauts de 1 carré; c'est-à-dire n doit être un entier divisible par 7 et le reste qu'on obtient après avoir divisé par 8 est un nombre élevé, soit 7. Notons que 7 est un entier. Notons qu'en additionnant $7 \times 8 = 56$ de manière répétée à 7, cette propriété est conservée, c'est-à-dire $63, 119, 175, 231$. Étant donné que $231 = 33 \times 7$, $B(231) = 33$. Étant donné que $231 = 28 \times 8 + 7$, Alphonse fait $28 + 7 = 35$ sauts, c'est-à-dire $A(231) = 35$. Par conséquent, $B(231) < A(231)$. Donc, $n = 231$, un entier positif satisfaisant les conditions voulues.

(b) Étant donné que $B(n) \leq A(n)$, nous avons $q_2 + r_2 \leq q_1 + r_1$. Étant donné que $8q_1 + r_1 = 7q_2 + r_2$ et $r_2 \leq q_1 + r_1 - q_2$,

$$8q_1 + r_1 \leq 7q_2 + q_1 + r_1 - q_2.$$

De même, $7q_1 \leq 6q_2$. Par conséquent, $q_2 \geq 7q_1/6$. En substituant cette valeur dans l'équation $8q_1 + r_1 = 7q_2 + r_2$, on obtient

$$8q_1 + r_1 \geq \frac{49}{6}q_1 + r_2.$$

Par conséquent,

$$\frac{q_1}{6} \leq r_1 - r_2.$$

Étant donné que $r_1 \leq 7$ et $r_2 \geq 0$, $r_1 - r_2 \leq 7$, ce qui implique que $q_1 \leq 42$. Étant donné que $r_1 \leq 7$, $n = 8q_1 + r_1 \leq 8 \times 42 + 7 = 343$.

Pour prouver que 343 est en effet le plus grand entier, notons que $343 = 42 \times 8 + 7$, ce qui implique que $A(343) = 42 + 7 = 49$. Notons aussi que $343 = 49 \times 7$, ce qui implique que $B(343) = 49$. Par conséquent, $A(343) = B(343)$. Donc, $n = 343$ est le plus grand entier positif pour que $B(n) \leq A(n)$.

Solution 2 :

En utilisant la notation de la solution 1, nous avons $A(n) = q_1 + r_1$ et $B(n) = q_2 + r_2$. Soit $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à x. Par exemple, $\lfloor \frac{23}{8} \rfloor = 2$. Notons que $q = \lfloor n/8 \rfloor$. Alors $r = n - 8q = n - 8\lfloor n/8 \rfloor$. Donc, $A(n)q + r = n - 7\lfloor n/8 \rfloor$. De même, $B(n) = n - 6\lfloor n/7 \rfloor$.

(a) Nous cherchons un entier $n > 200$ pour lequel $B(n) = n - 6\lfloor \frac{n}{7} \rfloor < n - 7\lfloor \frac{n}{8} \rfloor = A(n)$, c.-à-d., $7\lfloor \frac{n}{8} \rfloor < 6\lfloor \frac{n}{7} \rfloor$. Si on supprime les symboles exprimant la partie entière, l'inégalité se réduit à $\frac{7n}{8} < \frac{6n}{7}$, une inégalité qui n'est pas vraie. Ainsi, pour résoudre l'inégalité $7\lfloor \frac{n}{8} \rfloor < 6\lfloor \frac{n}{7} \rfloor$, nous devons définir $\frac{n}{8} - \lfloor \frac{n}{8} \rfloor$ comme la valeur la plus grande possible et $\frac{n}{7} - \lfloor \frac{n}{7} \rfloor$ comme la plus petite possible. Pour ce faire, il faut définir $\frac{n}{8}$ comme une valeur légèrement inférieur à un nombre entier de sorte que $\lfloor \frac{n}{8} \rfloor$ soit approximativement égal à $\frac{n}{8} - 1$, en s'assurant que $\frac{n}{7}$ soit un nombre entier, de sorte que $\lfloor \frac{n}{7} \rfloor = \frac{n}{7}$.

Soit $n = 56k + 7$, pour un certain entier $k > 0$. Alors $\lfloor \frac{n}{8} \rfloor = \lfloor \frac{56k+7}{8} \rfloor = \lfloor 7k + \frac{7}{8} \rfloor = 7k$, et $\lfloor \frac{n}{7} \rfloor = \lfloor \frac{56k+7}{7} \rfloor = 8k + 1$. Alors, notre inégalité devient $7 \cdot 7k < 6 \cdot (8k + 1)$, ce qui est équivalent à $k < 6$. Par exemple, si $k = 4$, alors $n = 56 \cdot 4 + 7 = 231$ est un nombre entier satisfaisant l'inégalité $7\lfloor \frac{n}{8} \rfloor < 6\lfloor \frac{n}{7} \rfloor$, ce qui implique que $B(231) < A(231)$. En vérifiant, nous constatons que $A(231) = 231 - 7\lfloor \frac{231}{8} \rfloor = 35$ et $B(231) = 231 - 6\lfloor \frac{231}{7} \rfloor = 33$. Ainsi, $n = 231$ est une solution qui satisfait au problème. Une autre solution est $n = 56 \cdot 5 + 7 = 287$, en prenant $k = 5$. $n = 238$ et $n = 239$ sont également des solutions.

(b) Pour tout entier positif n, il existe des entiers uniques p, q, r pour lesquels $n = 56p + 8q + r$, où $0 \leq q \leq 6$ et $0 \leq r \leq 7$. L'inégalité $B(n) \leq A(n)$ est équivalente à $7\lfloor \frac{n}{8} \rfloor \leq 6\lfloor \frac{n}{7} \rfloor$.

Nous avons $\lfloor \frac{n}{8} \rfloor = \lfloor \frac{56p+8q+r}{8} \rfloor = 7p + q + \lfloor \frac{r}{8} \rfloor = 7p + q$, étant donné que $0 \leq r \leq 7$. Nous avons également $\lfloor \frac{n}{7} \rfloor = \lfloor \frac{56p+8q+r}{7} \rfloor = 8p + q + \lfloor \frac{q+r}{7} \rfloor$.

Ainsi, l'inégalité $7\lfloor \frac{n}{8} \rfloor \leq 6\lfloor \frac{n}{7} \rfloor$ est équivalente à $7(7p + q) \leq 6(8p + q) + 6\lfloor \frac{q+r}{7} \rfloor$, qui se simplifie en $p + q \leq 6\lfloor \frac{q+r}{7} \rfloor$. Étant donné que $q + r \leq 6 + 7 = 13$, nous devons avoir $p + q \leq 6\lfloor \frac{13}{7} \rfloor = 6$.

Nous voulons déterminer le nombre entier le plus grand $n = 56p + 8q + r$ pour lequel l'inégalité ci-dessus est satisfaite. Pour ce faire, nous devons maximiser la valeur de p. Étant donné que $p + q \leq 6$, essayons d'abord avec $p = 6$. On a donc nécessairement $q = 0$. Cette solution satisfait l'inégalité $p + q \leq 6\lfloor \frac{q+r}{7} \rfloor$ si et seulement si $r = 7$. Nous remarquons que l'ensemble $(p,q,r) = (6,0,7)$ donne $n = 56 \times 6 + 7 = 343$, ce qui est également une solution parce que $A(343) = 343 - 7\lfloor \frac{343}{8} \rfloor = 49$ et $B(343) = 343 - 6\lfloor \frac{343}{7} \rfloor = 49$.

Pour démontrer que $n = 343$ est bien n le nombre entier le plus grand qui satisfait l'inégalité $B(n) \leq A(n)$, nous notons que $(p,q,r) = (6,0,7)$ est le seul ensemble qui satisfait l'inégalité pour $p = 6$, suite à l'analyse précédente. Pour toute autre solution, il faut que $p \leq 5$. Dans une telle solution, nous aurions $n = 56p + 8q + r \leq 56 \times 5 + 8 \times 6 + 7 = 335 < 343$.

Financière Sun Life

C4. Soit $f(x) = x^2 - ax + b$, où a et b sont deux entiers positifs.

(a) Supposons que $a = 2$ et que $b = 2$. Déterminer l'ensemble des racines réelles de $f(x) - x$ et l'ensemble des racines réelles de $f(f(x)) - x$.

(b) Déterminer le nombre de paires d'entiers positifs (a, b) avec $1 \leq a, b \leq 2011$ pour lesquelles chaque racine de $f(f(x)) - x$ est un entier.

Solution :

a) Si $a = 2$ et $b = 2$, alors $f(x) = x^2 - 2x + 2$. Donc, $f(x) - x = x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$. Par conséquent, les racines de $f(x) - x$ sont 1 et 2.

Maintenant, nous devons déterminer $f(f(x)) - x$. Notons que $f(f(x)) = (x^2 - 2x + 2)^2 - 2(x^2 - 2x + 2) + 2 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 2$. Par conséquent,

$$f(f(x)) - x = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 2.$$

Notons que 1 est une racine de $f(f(x)) - x$. Alors

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = (x - 1)(x^3 - 3x^2 + 3x - 2) = (x - 1)(x - 2)(x^2 - x + 1).$$

Notons que $x^2 - x + 1$ n'a pas de racines réelles étant donné que son discriminant est $1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$. Par conséquent, les racines réelles de $f(f(x)) - x$ sont 1 et 2.

(b) La réponse est 43.

Nous supposons que si r est une racine de $f(x) - x$, alors r est une racine de $f(f(x)) - x$. Étant donné que r est une racine de $f(x) - x$, $f(r) - r = 0$, c.-à-d. $f(r) = r$. Par conséquent,

$$f(f(r)) - r = f(r) - r = 0.$$

Donc, toute racine de $f(x) - x$ est une racine de $f(f(x)) - x$. Par conséquent, $f(x) - x$ est un facteur de $f(f(x)) - x$.

Notons que $f(f(x)) - x = f(x^2 - ax + b) - x = (x^2 - ax + b)^2 - a(x^2 - ax + b) + b - x$,

$$= x^4 - 2ax^3 + (a^2 + 2b - a)x^2 - (2ab - a^2 + 1)x + (b^2 - ab + b).$$

Étant donné que $f(x) - x = x^2 - (a + 1)x + b$, $f(f(x)) - x$ se factorise de la manière suivante

$$f(f(x)) - x = (x^2 - (a + 1)x + b)(x^2 - (a - 1)x + (b - a + 1)).$$

Étant donné que les deux facteurs sont unitaires, les racines de $f(f(x)) - x$ sont des entiers si et seulement si le discriminant de chacun des deux facteurs quadratiques est un carré parfait. Ces deux discriminants sont

$$(a + 1)^2 - 4b = a^2 + 2a + 1 - 4b$$

et

$$(a-1)^2 - 4(b-a+1) = a^2 + 2a + 1 - 4b - 4.$$

La différence entre le second et le premier discriminant est égale à quatre. Il n'existe que deux carrés parfaits dont la différence soit 4 : 4 et 0. Cet énoncé est vrai étant donné que si r, s sont des nombres entiers non négatifs de sorte que $r^2 - s^2 = 4$, alors $(r-s)(r+s) = 4$. Étant donné que r, s sont des nombres entiers non négatifs, $(r-s, r+s) = (2,2)$ or $(1,4)$. Dans le dernier cas, $r - s = 1$ et $r + s = 4$. Par conséquent, $r = 5/2$ et $s = 3/2$, qui ne sont pas des nombres entiers. Par conséquent, $(r-s, r+s) = (2,2)$, c.-à.-d. $r = 2, s = 0$. Donc, le plus grand carré parfait est $2^2 = 4$ et le plus petit carré parfait est 0.

Par conséquent, $a^2+2a+1-4b = 4$. En réécrivant l'expression et en la factorisant, on obtient :

$$(a+1)^2 = 4(b+1).$$

Étant donné que $(a+1)^2$ et 4 sont des carrés parfaits, $b+1$ est un carré parfait. Par conséquent, il existe un entier positif m de sorte que $b + 1 = m^2$. Alors $b = m^2 - 1$. Par conséquent, $(a+1)^2 = 4m^2$. Étant donné que a est un entier positif, $a + 1 = 2m$. Donc, $a = 2m - 1$. Par conséquent, $(a, b) = (2m - 1, m^2 - 1)$.

Nous vérifions maintenant que pour de telles paires (a, b) les racines de $x^2 - (a+1)x + b$ et $x^2 - (a-1)x + (b-a+1)$ sont toutes des entiers, ce qui implique de chaque racine de $f(f(x)) - x$ est un entier. En substituant $(a, b) = (2m-1, m^2-1)$ dans ces deux polynômes, on obtient $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = (x-(m-1))(x-(m+1))$ et $x^2 - (2m-2)x + (m^2-2m+1) = (x-(m-1))(x-(m-1))$. Étant donné que m est un entier positif, chacune des quatre racines de $f(f(x)) - x$ est un entier. (Étant donné que les coefficients des facteurs quadratiques valent 1, les racines des facteurs quadratiques ne sont des entiers que si et seulement si les discriminants correspondants sont des carrés parfaits.)

Étant donné que $1 \le a, b \le 2011$, il reste à trouver le nombre d'entiers positifs m de sorte que $1 \le 2m - 1, m^2 - 1 \le 2011$. Étant donné que $1 \le m^2 - 1 \le 2011$, $2 \le m^2 \le 2012$. Donc, $2 \le m \le \lfloor \sqrt{2012} \rfloor = 44$, où $\lfloor t \rfloor$ représente le plus grand entier inférieur ou égal à t. m peut avoir pour valeur chacun des 43 nombres suivants, à savoir $m = 2, 3, \ldots 44$. Ces valeurs de m satisfont $1 \le 2m - 1 \le 2011$.

Par conséquent, le nombre de paires ordonnées composée d'entiers positifs (a, b) pour lesquelles chaque racine de $f(f(x)) - x$ est un entier est : 43.