

Le Défi ouvert canadien de mathématiques

Financière Sun Life

Le mercredi 2 novembre 2011



En lettres moulées svp

NOM DU SUPERVISEUR DU TEST : _____ Signature: _____

NOM DE L'ÉLÈVE : Prénom : _____ Nom : _____

Signature de l'élève : _____ SEXE : M F

COURRIEL : _____ ÂGE : _____

ANNÉE SCOLAIRE : 8 9 10 11 12 CÉGEP AUTRE : _____

DIRECTIVES : NE PAS OUVRIR CE FEUILLET AVANT QU'ON VOUS L'INDIQUE

EXAMEN : Le DOCM compte trois parties à remplir en 2 heures et 30 minutes.

PARTIE A : Compte quatre questions de base de quatre points chacune.

PARTIE B : Compte quatre questions de niveau intermédiaire de six points chacune.

PARTIE C : Compte quatre questions de niveau avancé de dix points chacune.

DIAGRAMMES : Les diagrammes ne sont pas à l'échelle; ce ne sont que des aides.

TRAVAIL ET RÉPONSES : Tout le travail pour arriver aux solutions et les réponses doivent figurer dans le présent feuillet, dans l'espace réservé à cet effet. On attribue des points pour avoir complété le travail et pour la clarté. Une réponse ou une solution correcte, mais mal présentée, ne vous permettra pas d'obtenir tous les points possibles. Si votre réponse ou solution est incorrecte, le travail accompli et présenté dans ce feuillet sera pris en compte et pourrait vous valoir une note partielle.

On s'attend à ce que tous les calculs et les réponses soient exprimés en des chiffres exacts, tels que 4π , $2 + \sqrt{7}$, etc., plutôt que 12.566, 4.646, etc.

Les noms des lauréats seront publiés sur le site Web de la Société mathématique du Canada.

Il est interdit de discuter publiquement du contenu du DOCM 2011 et de vos réponses et solutions, y compris dans des séances de clavardage, pendant au moins 24 heures.



Les téléphones cellulaires et les calculatrices ne sont pas permis.

Le Défi ouvert canadien de mathématiques (DOCM) Financière Sun Life est une présentation de la Société mathématique du Canada, en partenariat avec :



UNIVERSITÉ
LAVAL



UNIVERSITY OF
TORONTO



uOttawa



Carleton
UNIVERSITY



N'écrivez pas dans ces cases.

A1	A2	A3	A4	A	B1	B2	B3	B4	B	C1	C2	C3	C4	C	ABC



PARTIE A, question 1 (4 points)

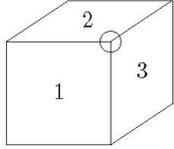
Si r est un nombre tel que $r^2 - 6r + 5 = 0$, quelle est la valeur de $(r - 3)^2$?

PARTIE A, question 2 (4 points)

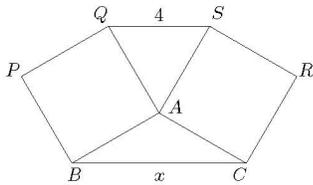
Carmen choisit quatre nombres de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ de sorte que la somme de ces quatre nombres est 11. Si ℓ est le plus grand de ces quatre nombres, quelle est la valeur de ℓ ?

PARTIE A, question 3 (4 points)

Les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont inscrits sur les faces d'un cube de manière à ce que la somme des nombres sur chaque paire de faces opposées soit 7. Pour chacun des huit coins du cube, on multiplie les trois nombres qui figurent sur les faces adjacentes du coin en question et on prend cette valeur en note. (Dans le diagramme, la valeur qui correspond au coin indiqué est $1 \times 2 \times 3 = 6$.) Quelle est la somme des huit valeurs attribuées aux coins du cube?

**PARTIE A, question 4 (4 points)**

Dans la figure ci-dessous, $AQPB$ and $ASRC$ sont des carrés et AQS est un triangle équilatéral. Si $QS = 4$ et $BC = x$, quelle est la valeur de x ?



PARTIE B, question 1 (6 points)

Arthur se rend chez David en voiture et veut arriver à une certaine heure. S'il conduit à une vitesse de 60 km/h, il arrivera 5 minutes en retard. S'il conduit à une vitesse de 90 km/h, il arrivera 5 minutes en avance. S'il conduit à une vitesse de n km/h, il arrivera exactement à l'heure. Quelle est la valeur de n ?

PARTIE B, question 2 (6 points)

Les entiers a , b , c , d , et e possèdent les trois caractéristiques suivantes :

(i) $2 \leq a < b < c < d < e < 100$

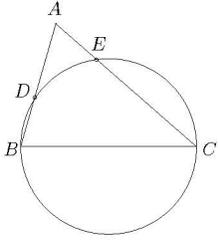
(ii) $\text{pgcd}(a, e) = 1$

(iii) a , b , c , d , e forment une suite géométrique.

Quelle est la valeur de c ?

PARTIE B, question #3 (6 points)

Dans la figure ci-dessous, BC est un diamètre du cercle, où $BC = \sqrt{901}$, $BD = 1$, et $DA = 16$. Si $EC = x$, quelle est la valeur de x ?



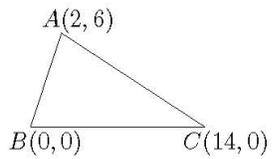
PARTIE B, question #4 (6 points)

Un groupe de n amis a passé un examen de mathématiques comprenant 8 problèmes à réponse courte $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8$, et 4 problèmes à développement F_1, F_2, F_3, F_4 . Chaque membre du groupe a répondu correctement à exactement 11 des 12 problèmes. On forme un tableau de 8×4 carrés. Dans le carré situé à la i^e rangée et la j^e colonne, on inscrit le nombre de personnes qui ont correctement résolu à la fois les problèmes S_i et F_j . Si la somme des 32 nombres du tableau est 256, quelle est la valeur de n ?

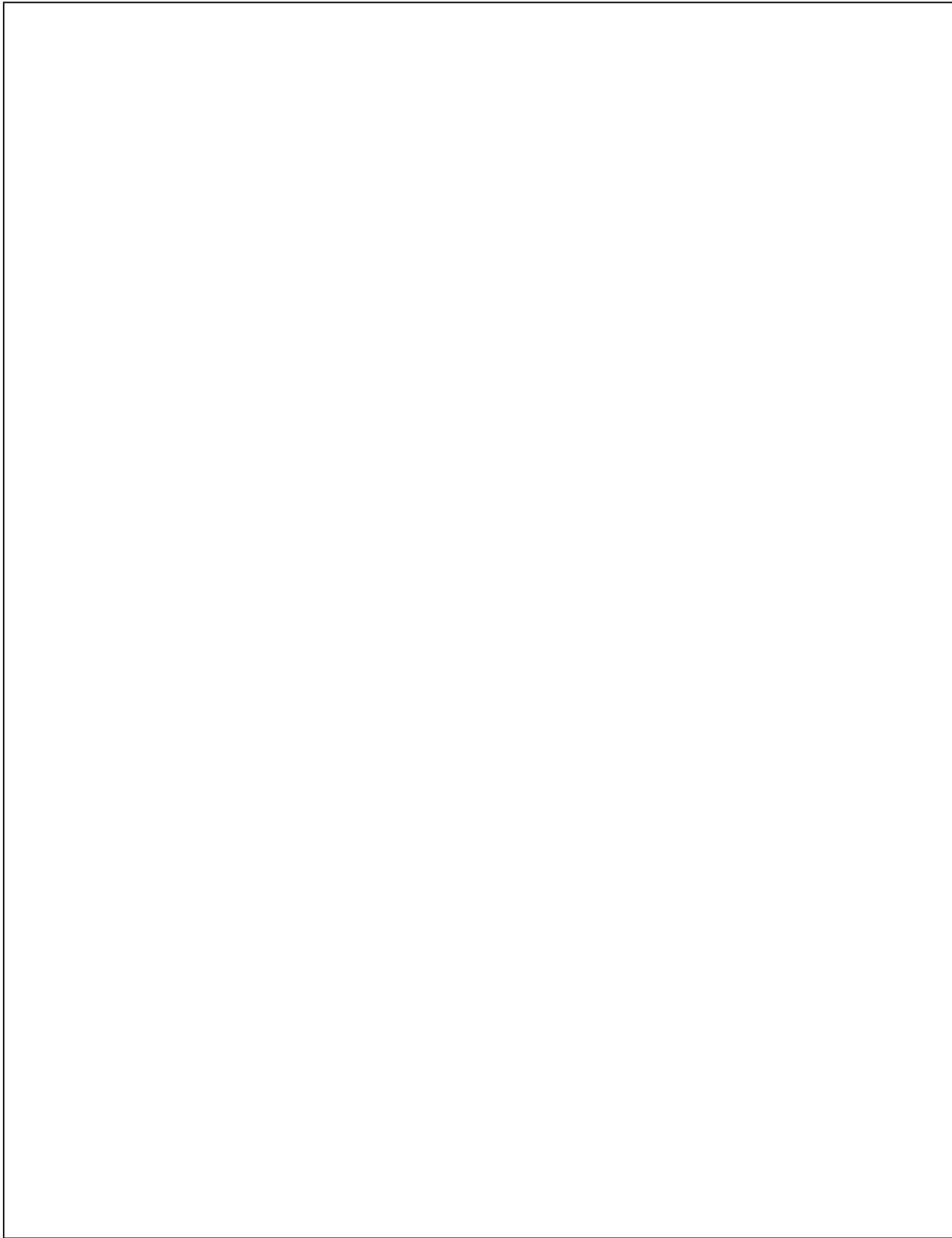
	F_1	F_2	F_3	F_4
S_1				
S_2				
S_3				
S_4				
S_5				
S_6				
S_7				
S_8				

PARTIE C, question 1 (10 points)

ABC est un triangle dont les coordonnées sont $A = (2, 6)$, $B = (0, 0)$, et $C = (14, 0)$.



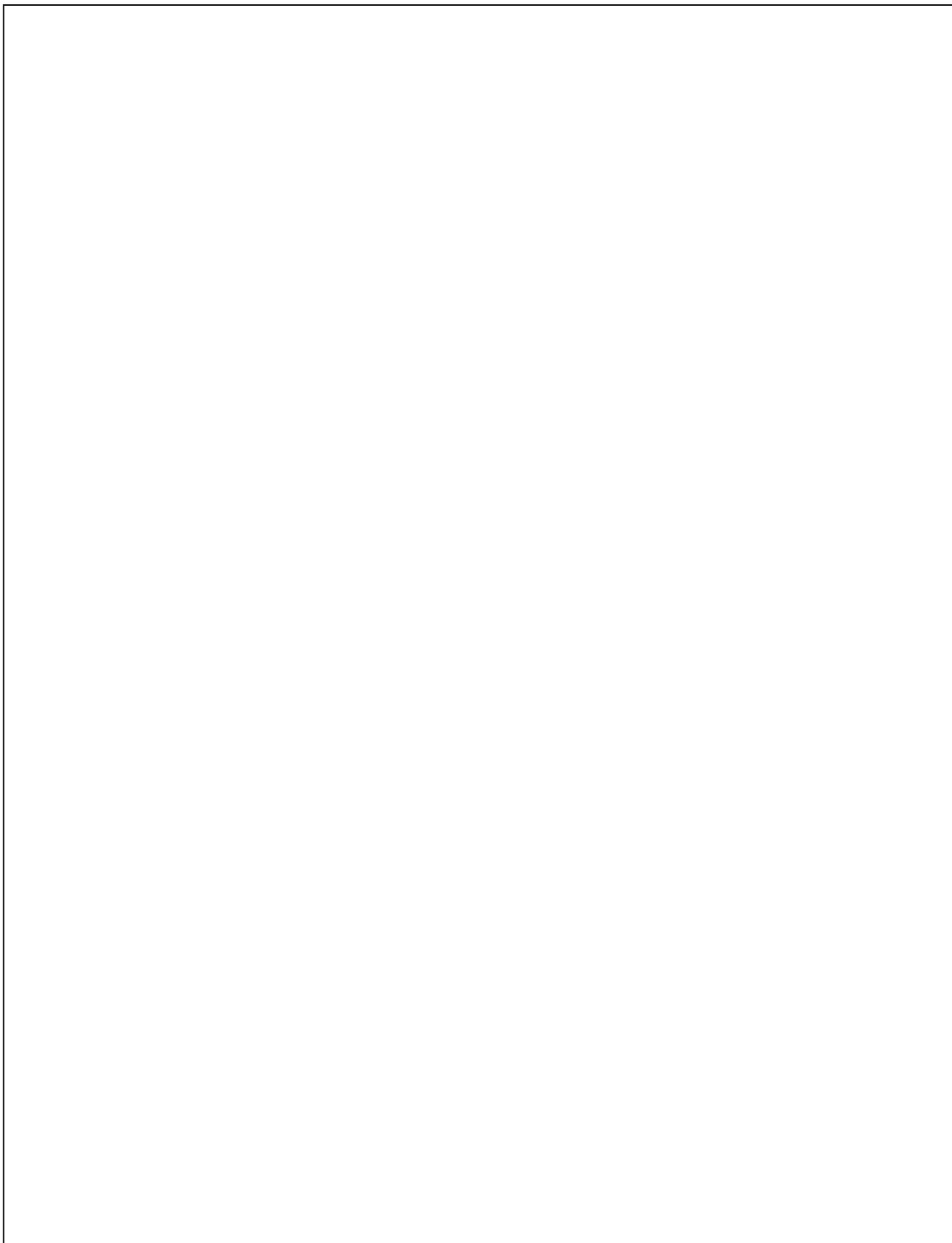
- Soit P le point médian du côté AB . Déterminer l'équation de la droite perpendiculaire à AB qui passe par P .
- Soit Q le point sur la droite BC où PQ est perpendiculaire à AB . Déterminer la longueur du segment AQ .
- Il y a un cercle (unique) qui passe par les points A , B , et C . Déterminer le rayon de ce cercle.



PARTIE C, question 2 (10 points)

Charlotte passe un examen comprenant 100 questions; la réponse à chaque question est VRAI ou FAUX. L'enseignante de Charlotte indique que pour chaque cinq questions *consécutives* de l'examen, la réponse à exactement trois d'entre elles est VRAI. Juste avant le début de l'examen, l'enseignante chuchote à Charlotte que la réponse à la première et à la dernière question est FAUX.

- (a) Déterminer le nombre de questions pour laquelle la réponse est VRAI.
- (b) Quelle est la bonne réponse à la sixième question de l'examen?
- (c) Expliquer comment Charlotte peut répondre correctement aux 100 questions de l'examen.



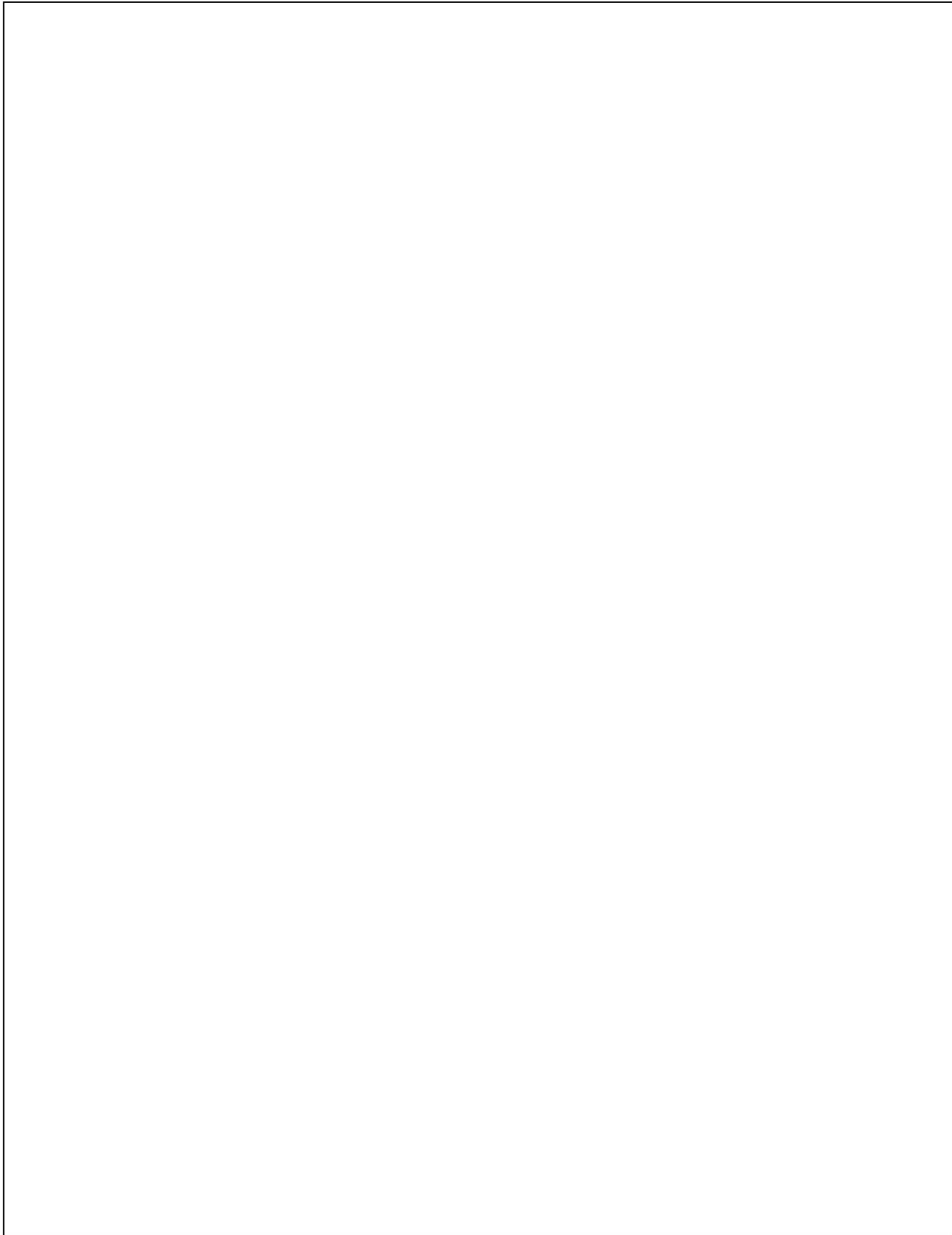
PARTIE C, question 3 (10 points)

Soit n un entier positif. Une rangée de $n+1$ carrés est numérotée de gauche à droite tel qu'illustré ci-dessous.

0	1	2	...	n
---	---	---	-----	-----

Deux grenouilles appelées Alphonse et Béryl commencent une course à partir du carré 0. Chaque seconde, Alphonse et Béryl font un saut vers la droite selon les règles suivantes : s'il y a au moins huit carrés à la droite d'Alphonse, alors ce dernier doit sauter huit carrés vers la droite; sinon, il saute d'un carré vers la droite. S'il y a au moins sept carrés à la droite de Béryl, alors elle doit sauter sept carrés vers la droite; sinon, elle saute d'un seul carré vers la droite. $A(n)$ et $B(n)$ désignent respectivement le nombre de secondes qu'il faut à Alphonse et à Béryl pour atteindre le carré n . Par exemple, $A(40) = 5$ et $B(40) = 10$.

- (a) Déterminer l'entier $n > 200$ pour lequel $B(n) < A(n)$.
(b) Déterminer le plus grand entier n pour lequel $B(n) \leq A(n)$.

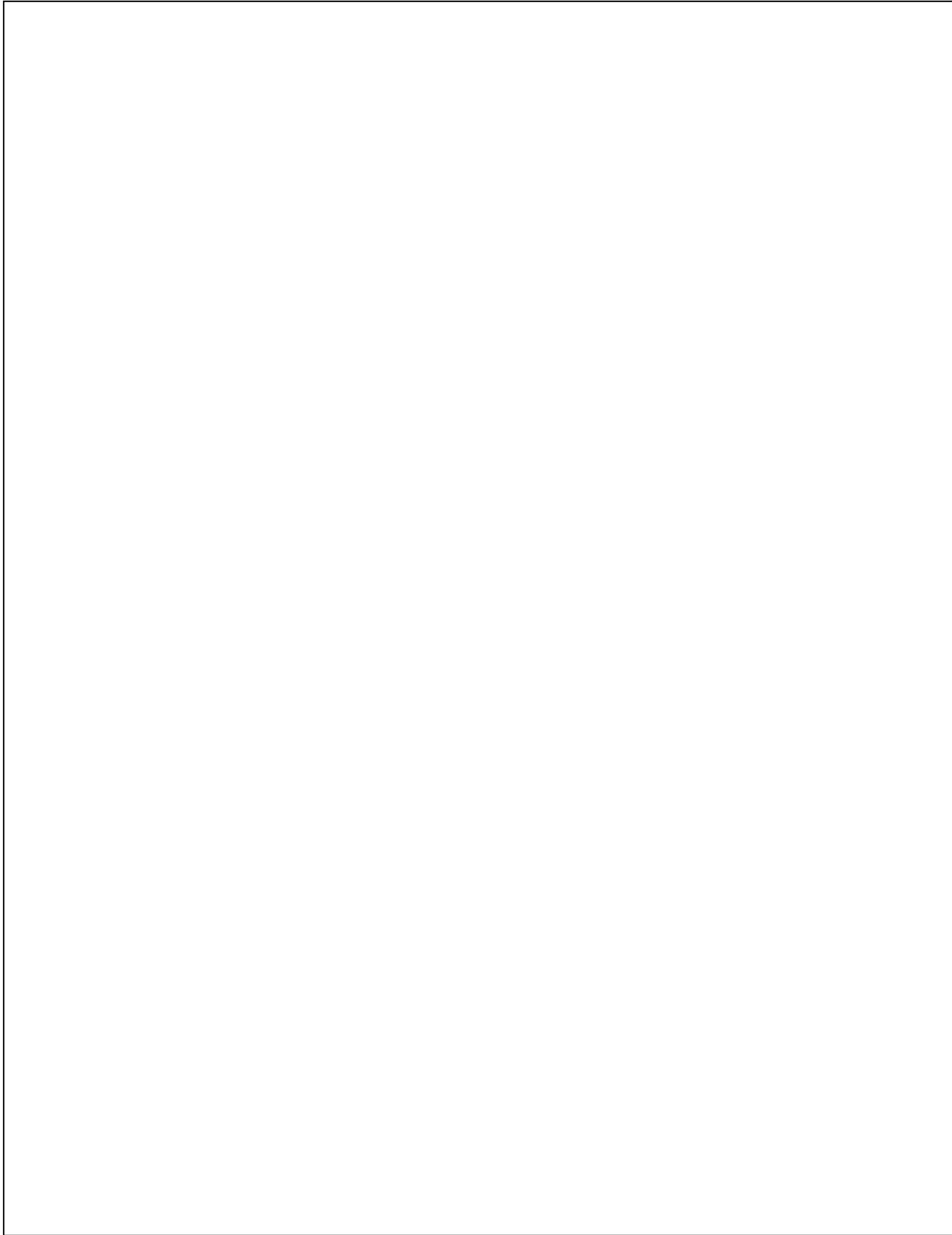


PARTIE C, question 4 (10 points)

Soit $f(x) = x^2 - ax + b$, où a et b sont deux entiers positifs.

(a) Supposons que $a = 2$ et que $b = 2$. Déterminer l'ensemble des racines réelles de $f(x) - x$, et l'ensemble de racines réelles de $f(f(x)) - x$.

(b) Déterminer le nombre de paires d'entiers positifs (a, b) avec $1 \leq a, b \leq 2011$ pour lesquelles chaque racine de $f(f(x)) - x$ est un entier.





Le Défi ouvert canadien de mathématiques Financière Sun Life est présenté par :



**Canadian Mathematical Society
Société mathématique du Canada**

en partenariat avec :



uOttawa



La Société mathématique du Canada (SMC) favorise l'avancement, la découverte, l'apprentissage et l'application des mathématiques. Pour en apprendre davantage au sujet de la SMC et des mathématiques au Canada, visitez : www.smc.math.ca