The Canadian Mathematical Society — La Société mathématique du Canada

La Société mathématique du Canada

en collaboration avec

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

présente

Le Défi ouvert canadien de mathématiques Financière Sun Life

Financière Sun Life

le mercredi 25 novembre 2009

Durée: 2 heures et demie

L'usage de la calculatrice n'est pas permis.
Attendre le signal avant d'ouvrir ce cahier.
Le questionnaire est divisé en deux parties.

PARTIE A

Cette partie est composée de 8 questions de 5 points chacune. On peut obtenir les cinq points d'une question en écrivant la (les) réponse(s) correcte(s) dans l'espace prévu à cet effet. Si la réponse est erronée, **tout travail présenté dans l'espace approprié du cahier-réponse sera évalué** et pourra mériter une partie des points.

PARTIE B

Cette partie est composée de 4 questions de 10 points chacune. Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse. Le brouillon doit être fait ailleurs. Si l'espace du cahier est rempli, la surveillante ou le surveillant fournira du papier ligné. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Soyez prudent en inscrivant votre nom et le nom de votre école sur chaque feuille insérée.

Des points sont accordés pour des solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

REMARQUES

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Une liste sera publiée, sur le site Web de la SMC et celui du CEMI, portant le nom des candidats qui ont obtenu le plus grand nombre de points.

Le Défi ouvert canadien de mathématiques
Financière Sun Life

Remarques :
1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Les réponses et les calculs doivent être exprimés à l'aide de nombres exacts, tels que 4π et $2+\sqrt{7}$, plutôt que $12{,}566\ldots$ ou $4{,}646\ldots$.
4. L'usage de la calculatrice **n'est pas** permis.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.

PARTIE A

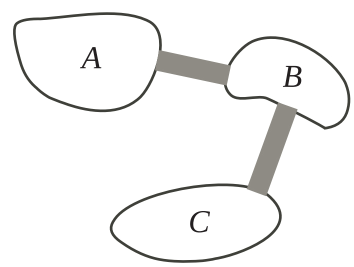
1. Déterminer la valeur de l'expression :
$$-1+2-3+4-5+6-7+8-9+10-11+12-13+14-15+16-17+18$$

2. Soit $3\times 10^a+5\times 10^b+7\times 10^c=5073$, a, b et c étant des entiers non négatifs. Quelle est la valeur de $a+b+c$?

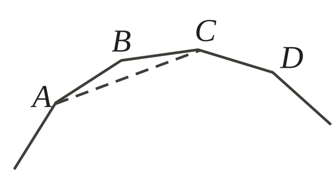
3. Santo a 10 pièces de monnaie, chacune étant une pièce de 25 ¢ ou une pièce de 10 ¢. La valeur totale des pièces de 10 ¢ est plus grande que la valeur totale des pièces de 25 ¢. Quel est le plus petit nombre possible de pièces de 10 ¢ qu'il pourrait avoir ?

4. Les entiers strictement positifs 15, 12 et n sont tels que le produit de n'importe quels deux de ces nombres est divisible par le troisième nombre. Déterminer la plus petite valeur possible de n.

5. Dans la figure ci-contre, on voit trois îles A, B et C. Les îles A et B sont reliées par un pont, de même que les îles B et C. Maya commence son trajet sur l'île A et elle utilise les ponts pour aller d'une île à une autre. Elle inscrit les îles qu'elle visite, dans l'ordre. Elle ne visite pas nécessairement les trois îles. Si elle traverse des ponts un total de 20 fois, combien y a-t-il de suites possibles des îles A, B et C qu'elle pourrait visiter ?



6. On dit qu'un polygone est *régulier* si tous ses côtés ont la même longueur et si tous ses angles intérieurs ont la même grandeur. La figure ci-contre montre une partie d'un polygone régulier. Sachant que $\angle ACD=120°$, combien de côtés le polygone a-t-il ?



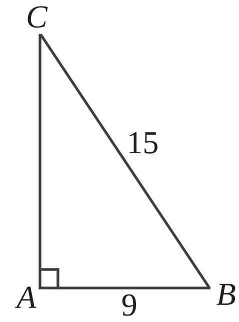
7. Déterminer toutes les mesures de l'angle θ ($0° \le \theta \le 360°$) pour lesquelles $\log_2(-3\sin\theta)=2\log_2(\cos\theta)+1$.

8. Déterminer tous les triplets (a,b,c) d'entiers *strictement positifs* tels que $a!=4(b!)+10(c!)$.

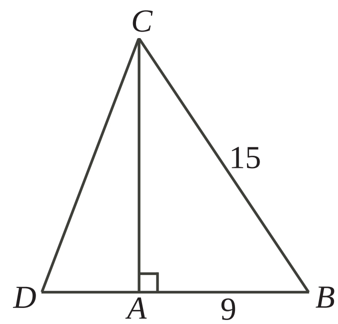
   Remarque : Soit un entier strictement positif n. Le symbole $n!$ (que l'on nomme « factorielle n ») représente le produit des entiers positifs de 1 à n ; c'est-à-dire que $n!=n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$. Par exemple, $5!=5(4)(3)(2)(1)$.

PARTIE B

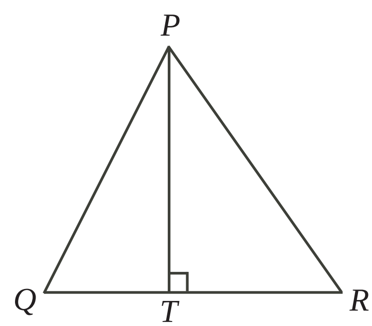
1. (a) Dans la figure ci-contre, $\angle CAB = 90°$, $AB = 9$ et $BC = 15$. Déterminer l'aire du triangle ABC.



   (b) Le côté BA du triangle ABC de la partie (a) est prolongé jusqu'au point D. Sachant que le triangle CDB a une aire de 84, déterminer la longueur CD.



   (c) Dans le triangle PQR ci-contre, $PQ = 25$ et $QR = 25$. Sachant que le triangle PQR a une aire de 300, déterminer la longueur PR.



2. Le triangle PQR a pour sommets $P(7, 13)$, $Q(19, 1)$ et $R(1, 1)$. Soit $M(4, 7)$ le milieu du côté PR et N le milieu de PQ.
   (a) Déterminer l'équation de la médiane du triangle menée aux points Q et M.
   (b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection G de RN et de QM.
   (c) Soit F le point sur PR pour lequel QF est perpendiculaire à PR. Soit T le point sur PQ pour lequel RT est perpendiculaire à PQ. Déterminer les coordonnées du point d'intersection H des hauteurs QF et RT.
   (d) Déterminer lequel des points G et H est le plus près de l'origine.

3. Soit deux fonctions f et g.
   On dit que le nombre réel c est un *point fixe réel* de f si $f(c) = c$.
   On dit que f et g sont *commutables* si $f(g(x)) = g(f(x))$ pour tous les nombres réels x.
   (a) Soit $f(x) = x^2 - 2$. Déterminer tous les points fixes réels de f.
   (b) Soit $f(x) = x^2 - 2$. Déterminer toutes les fonctions polynômes du troisième degré g pour lesquelles f et g sont commutables.
   (c) Soit p et q deux fonctions commutables à valeurs réelles.
   Si $2\left[q(p(x))\right]^4 + 2 = \left[p(x)\right]^4 + \left[p(x)\right]^3$ pour tous les nombres réels x, démontrer que q n'admet aucun point fixe.

4. Étant donné un entier strictement positif n, on définit $f(n)$ comme étant le plus petit entier strictement positif s pour lequel $1 + 2 + 3 + \cdots + (s-1) + s$ est divisible par n. Par exemple $f(5) = 4$, puisque $1 + 2 + 3 + 4$ est divisible par 5, mais ni 1, ni $1 + 2$, ni $1 + 2 + 3$ n'est divisible par 5.
   (a) Déterminer tous les entiers strictement positifs a pour lesquels $f(a) = 8$.
   (b) Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers positifs impairs b pour lesquels
   $$f(b+1) - f(b) > 2009\ .$$
   (c) Déterminer la plus petite valeur strictement positive de k pour laquelle l'équation $f(c) = f(c+k)$ admet une solution entière impaire strictement positive comme valeur de c. Appuyer le travail par une preuve.