La société mathématique du Canada
en collaboration avec

Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
présente le

Défi ouvert canadien de mathématiques

Le mercredi 24 novembre 2004

Durée : 2 heures et demie

L'usage de la calculatrice n'est pas permis.

Attendre le signal avant d'ouvrir ce cahier.
Le questionnaire est divisé en deux parties.

PARTIE A
Cette partie est composée de 8 questions de 5 points chacune. On peut obtenir les cinq points d'une question en écrivant la réponse correcte dans l'espace prévu à cet effet. Si la réponse est erronée, **tout travail présenté dans l'espace approprié du cahier-réponse sera évalué** et pourra mériter une partie des points.

PARTIE B
Cette partie est composée de 4 questions de 10 points chacune. Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse. Le brouillon doit être fait ailleurs. Si l'espace du cahier est rempli, la surveillante ou le surveillant fournira du papier ligné. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse.
Des points sont accordés pour des solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

REMARQUE : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Défi ouvert canadien de mathématiques

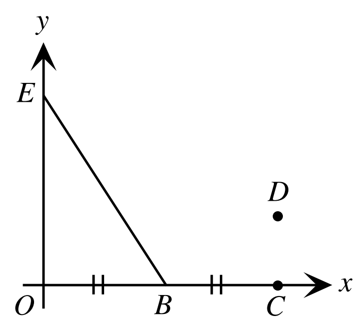
Remarques :	1.	Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
	2.	Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
	3.	Les réponses et les calculs doivent être exprimés à l'aide de nombres exacts, tels que 4π, $2+\sqrt{7}$, etc.
	4.	L'usage de la calculatrice **n'est pas** permis.

PARTIE A

1. Si $x + 2y = 84 = 2x + y$, quelle est la valeur de $x + y$?

2. Soit S l'ensemble des entiers positifs de trois chiffres dont les chiffres sont 3, 5 et 7, aucun chiffre n'étant répété dans un même nombre. Calculer le reste lorsque la somme des nombres de l'ensemble S est divisée par 9.

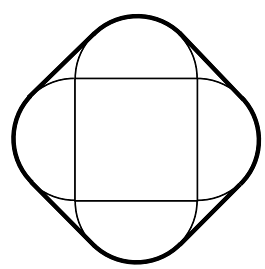
3. Le point E a pour courdonnées $(0, 2)$. Le point B est situé sur la partie positive de l'axe des abscisses de manière que $BE = \sqrt{7}$. Le point C est situé sur la partie positive de l'axe des abscisses de manière que $BC = OB$. Le point D est situé dans le quadrant I de manière que $\angle CBD = 30^\circ$ et $\angle BCD = 90^\circ$. Quelle est la distance entre E et D ?



4. Une fonction f satisfait aux conditions suivantes :
   i) $f(1) = 1$
   ii) $f(2x) = 4f(x) + 6$
   iii) $f(x + 2) = f(x) + 12x + 12$
   Calculer $f(6)$.

5. Une manufacture fabrique deux formats de tentes, soit des grandes et des petites. L'année dernière, la manufacture a vendu 200 tentes dont un quart étaient grandes. La vente des grandes tentes a produit un tiers des revenus de la manufacture. Quel était le rapport du prix d'une grande tente au prix d'une petite ?

6. Dans la figure, on a tracé un carré ayant des côtés de longueur 2. Sur chaque côté, on a tracé un demi-cercle. Une bande élastique a ensuite été placée autour de la figure. Quelle est la longueur de la bande élastique dans cette position ?



7. Soit a et b deux nombres réels tels que $a > 1$ et $b > 0$.
   Déterminer la valeur de a, sachant que $ab = a^b$ et $\dfrac{a}{b} = a^{3b}$.
8. Une feuille de papier de forme rectangulaire, $ABCD$, est telle que $AD = 1$ et $AB = r$, $1 < r < 2$. La feuille est pliée au sommet A de manière que le côté AD soit aligné sur le côté AB. Sans déplier, la feuille est pliée au sommet B de manière que le côté CB soit aligné sur le côté AB. La feuille forme alors un triangle. Une partie de ce triangle a une épaisseur de quatre feuilles. Quelle est l'aire de cette région en fonction de r ?

PARTIE B

1. Les points $A(-8, 6)$ and $B(-6, -8)$ sont situés sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 100$.
   (a) Déterminer l'équation de la droite qui passe par A et B.
   (b) Déterminer l'équation de la médiatrice du segment AB.
   (c) La médiatrice de AB coupe le cercle en deux points, soit P dans le quadrant I et Q dans le quadrant III. Déterminer les coordonnées de P et de Q.
   (d) Quelle est la longueur de PQ ? Justifier sa réponse.
2. (a) Déterminer les deux valeurs de x qui vérifient $x^2 - 4x - 12 = 0$.
   (b) Déterminer *la* valeur de x qui vérifie $x - \sqrt{4x + 12} = 0$. Justifier sa réponse.
   (c) Déterminer toutes les valeurs réelles de c pour lesquelles l'équation

$$x^2 - 4x - c - \sqrt{8x^2 - 32x - 8c} = 0$$

   admet exactement deux racines réelles distinctes.
3. Une carte indique où sont situés tous les restaurants *La poutine dorée* en Amérique du nord. Sur cette carte, on a tracé un segment entre chaque restaurant et le restaurant qui est plus près de lui. Chaque restaurant a un seul voisin le plus près. (On remarquera qu'il est possible qu'un restaurant A soit le restaurant le plus près de B sans que B soit le restaurant le plus près de A.)
   (a) Démontrer qu'il est impossible pour trois des segments de former un triangle.
   (b) Démontrer qu'il est impossible pour un restaurant d'être relié par des segments à plus de cinq autres restaurants.
4. Dans une *suite sumac*, t_1, t_2, t_3, $\ldots$, t_m, chaque terme est un entier supérieur ou égal à 0. De plus, à partir du troisième terme, chaque terme est égal à la différence des deux termes précédents, c'est-à-dire que, $t_{n+2} = t_n - t_{n+1}$ lorsque $n \geq 1$. La suite se termine au terme t_m si $t_{m-1} - t_m < 0$. Par exemple, la suite 120, 71, 49, 22, 27 est une suite sumac de longueur 5.
   (a) Déterminer l'entier positif B pour lequel la suite sumac 150, B, $\ldots$ admet un nombre maximal de termes.
   (b) Soit m un entier tel que $m \geq 5$. Déterminer le nombre de suites sumac de longueur m, de manière que $t_m \leq 2000$ et qu'aucun des termes ne soit divisible par 5.

Défi ouvert
canadien de
mathématiques
2004
(français)