La Société mathématique du Canada

en collaboration avec

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Premier défi ouvert canadien de mathématiques (1996) Solutions

Remarque: Toutes les questions de la Partie A ont été notées sur un maximun possible de 5 points.

Partie A

1. Les racines de l'équation $x^2 + 4x - 5 = 0$ sont aussi des racines de l'équation $2x^3 + 9x^2 - 6x - 5 = 0$.
   Quelle est la troisième racine de la deuxième équation?

   La troisième racine peut être calculée soit en divisant l'expression quadratique en une expression cubiqe ou par la mise en facteur des deux expressions. De nombreux étudiants qui ont effectué cette division n'ont pas déterminé la valeur de la troisième racine, soit $-\frac{1}{2}$.

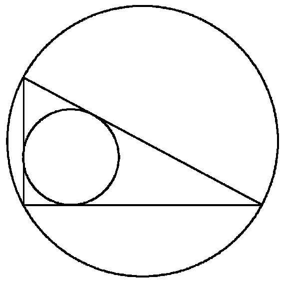
   La note moyenne fut de 3,9.

2. Les nombres a, b, c sont les chiffres d'un nombre de trois chiffres. Ils vérifient l'équation $49a + 7b + c = 286$. Quel est le nombre de trois chiffres $(100a + 10b + c)$?

   On peut traiter ce problème en procédant par tâtonnement. On peut aussi le résoudre en tanant compte du fait que 7 divise. Le résidu du côté gauche devient alors c, alors que sur le côté droit, la division par 7 donne 6 comme résidu; d'où $c = 6$. En poursuivant de la même façon, $a = b = 5$, on arrive à la réponse 556.

   La note moyenne fut de 3,9.

3. Les sommets d'un triangle rectangle sont situés sur un cercle de rayon R. Les côtés du triangle sont tangents à un autre cercle, de rayon r. Sachant que les côtés qui forment l'angle droit ont des longueurs respectives de 16 et de 30, déterminer la valeur de $R + r$.



Comme il s'agit d'un triangle rectangle, l'hyponténuse est égale au diamètre du cercle, soit $R = 17$. On utilisant l'aire du grand triangle et la somme des trois petits triangles d'une hauteur r, on détermine que $r = 6$. D'où $R + r = 23$.

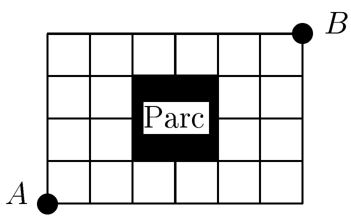
La note moyenne fut de 2,1.

4. Détermine le plus petit entier positif n qui vérifie l'équation $n^3 + 2n^2 = b$, b étant le carré d'un entier impair.

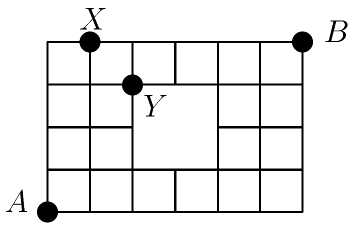
On peut résoudre facilement ce problème en remarquant que $n^3 + 2n^2 = n^2(n + 2)$. Étant donné que n^2 est un carré, $n + 2$ l'est aussi, et 7 est la plus petite valeur qui permette à $n + 2$ d'être un carré impair.

La note moyenne fut de 2,3.

5. Le diagramme est un plan de la ville de Treillis. Le périmètre du parc est une rue, mais il n'y a pas de rue qui traverse le parc. Un chemin le plus court, du point A au point B, est un chemin par lequel on ne s'éloigne jamais du point B. Combien y a–t–il de chemins les plus courts de A à B?



La solution de ce problème repose sur deux observations. Premièrement, il y a un nombre identique de façons de passer au–dessus ou au–dessous du parc. Deuxièmement, si l'on veut passer au–dessus du parc, il faut passer par X ou Y, mais on ne peut passer par ces deux points à la fois.



Il existe 5 trajets entre A et X, et pour chacun, il n'y a qu'une seule façon de se rendre à B. Il existe 10 trajets entre A et Y et pour chacun il y a 5 façons de se rendre à B. D'où l'existence de 110 trajets au total.

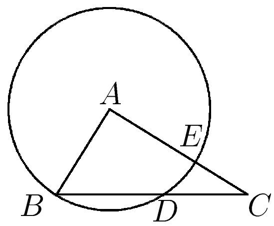
La note moyenne fut de 0,9.

6. Dans une ligue de baseball de 14 équipes, chaque équipe a reconté chaque autre équipe 10 fois. À la fin de la saison, après avoir placé les équipes en ordre selon leur nombre de victoires, on a constaté que la différence dans le nombre de victoires de n'importe quelles deux équipes en positions adjacentes était toujours la même. Sachant qu'il n'y a pas eu de partie nulle, déterminer le plus grand nombre de parties que la dernière équipe a pu gagner.

   Chaque équipe joue 130 parties pour un total de 910 parties. En utilisant une séquence arithmétique avec un écart de 2 (il ne peut être de 1), on arrive à une base de progression de 52, soit le nombre de parties remportées par la dernière équipe.

   La note moyenne fut de 1,7.

7. Le triangle ABC est rectangle en A. Le cercle de centre A et de rayon AB coupe BC et AC aux points respectifs D et E, tel qu'illustré. Si $BD = 20$ et $DC = 16$, déterminer AC^2.



   On peut résoudre ce problème très facilement en traçant une ligne perpendiculaire de A à BC et en utilisant les caractéristiques des triangles similaires. La réponse et 936.

   La note moyenne fut de 0,7.

8. Déterminer tous les couples des nombres entiers, (x, y), qui vérifient l'équation

   $6x^2 - 3xy - 13x + 5y = -11.$

   Pour traiter toute question de ce genre, il fault déterminer une variable en fonction de l'autre. Cette méthode nous donne une fraction pour laquelle le démoninateur est une expression qui puisse diviser le numérateur si un nombre entier en résulte. Dans le présent cas, la détermination de y en fonction de x nécessite que x ait une valeur de 2 ou 1, et y serait donc égal à 9 ou -2.

   La note moyenne fut de 1,2.

9. Si $\log_{2n}(1944) = \log_n\left(486\sqrt{2}\right)$, calculer la valeur de n^6.

   Si vous avez des doutes lorqu'il est question de logarithmes, allez à la base. Si $\log_b a = c$, alors $b^c = a$. En appliquant cette constatation à toutes les expressions données, on arrive à la réponse $3^{20} \cdot 2^6$.

   La note moyenne fut de 1,0.

10. Déterminer la somme des mesures des angles A et B tels que $0° \leq A,\ B \leq 180°$ et $\sin A + \sin B = \sqrt{\frac{3}{2}},\ \cos A + \cos B = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

La méthode la plus directe consiste à mettre au carré les deux équations et à les additionner. On peut ainsi déterminer que $\cos(A - B) = 0$, et que $A - B = \pm 90°$. En considérant chaque possibilité, on peut déterminer que $A + B = 120°$.

La note moyenne fut de 0,6.

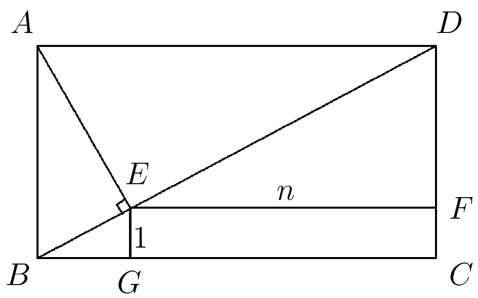
Partie B

1. Trois nombres forment une suite arithmétique dont la raison est 11. Si on diminue le premier nombre de 6, si on diminue le duexième nombre de 1 et si on double le troisième nombre, on obtient alors trois nombres qui forment une suite géométrique. Déterminer les trois nombres qui forment la suite arithmétique.

Les conditions énumérées nous amènent à déterminer trois nombres qui doivent former une séquence géométrique. À partir de ces nombres et du fait que le ratio des éléments consécutifs est constant, on peut déterminer une équation quadratique qui a deux solutions, d'où les séquences arithmétiques possibles 14, 25, 36 ou -26, -15, -4.

La note moyenne fut de 3,6.

2. Un rectangle $ABCD$ a une diagonale de longueur d. On abaisse une perpendiculaire AE à la diagonale BD. Les côtés du rectangle $EFCG$ ont des longueur de 1 et de n. Démontrer que $d^{2/3} = n^{2/3} + 1$.



Il existe de nombreuses façons de résoudre ce problème, dont la géométrie analytique. Dans tous les cas, il faut utiliser des variables. Si l'on établit que $BG = x$, seule une variable est nécessaire. Si l'on utilise la méthode des triangles similaires et la théorème de Pythagore, $BE = \sqrt{x^2 + 1}$, $AB = x^2 + 1$, $DF = x^2$ et $AD = x + n$, qui nous amène à $n = x^3$. Le résultat recherché découle ensuite de $BD^2 = AD^2 + AB^2$.

3. **(a)** On considère les nombres positifs $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ et la fonction polynôme du second degré

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2.$$

Démontrer que $f(x)$ atteint sa valeur maximale en $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$, et démontrer que

$$\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 .$$

(b) La somme de seize nombres positifs est égale à 100 et la somme de leurs carré est égale à 1000. Démontrer qu'aucun des seize nombres n'est supérieur à 25.

La première partie de la solution exige que l'on mette au carré la fonction donnée et que l'on remarque que la valeur de cette fonction est toujours égale ou supérieure à 0. En deuxième lieu, il faut combiner le résultat de la partie (a) avec le nombre le plus élevé en fonction des quinze nombres restants et procéder de façon semblable avec le carré des nombres.