Olympiade mathématique du Canada 2019

Solutions officielles

1. Amélie a placé les points A, B et C dans le plan de façon à ce que $AB = BC = CA = 6$. Elle peut ensuite placer un nouveau point s'il s'agit du centre du cercle circonscrit d'un triangle dont les sommets sont déjà placés dans le plan. Par exemple, elle peut placer le centre O du cercle circonscrit du triangle ABC et ensuite placer le centre du cercle circonscrit du triangle ABO.

   (a) Démontrez qu'Amélie peut éventuellement placer un point dont la distance à un point déjà placé est supérieure à 7.

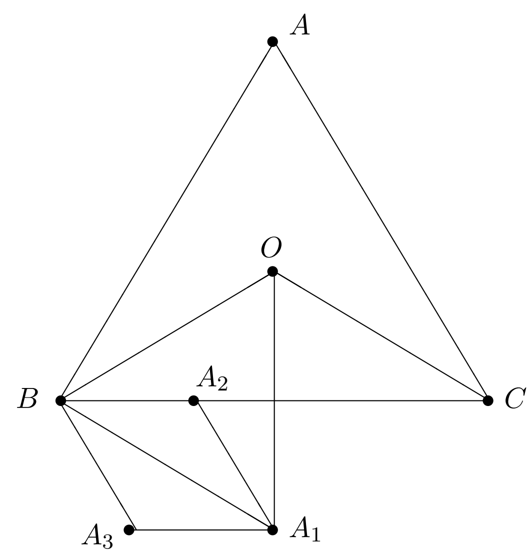
   (b) Démontrez qu'Amélie peut éventuellement placer un point dont la distance à un point déjà placé est supérieure à 2019.

   (Note : le cercle circonscrit à un triangle est le cercle qui passe par ces trois sommets.)

Solution.

(a) Étant donné un triangle $\triangle ABC$, Amélie peut placer les points suivants :

- O est le centre du cercle circonscrit de $\triangle ABC$
- A_1 est le centre du cercle circonscrit de $\triangle BOC$
- A_2 est le centre du cercle circonscrit de $\triangle OBA_1$
- A_3 est le centre du cercle circonscrit de $\triangle BA_2A_1$



On affirme que $AA_3 > 7$. On présente deux façons de justifier cette affirmation.

<u>Première méthode</u> : Par symétrie du triangle équilatéral $\triangle ABC$, on a $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120°$. Puisque $OB = OC$ et $A_1B = A_1O = A_1C$, on en déduit que $\triangle A_1OB \cong \triangle A_1OC$, et donc $\angle BOA_1 = \angle COA_1 = 60°$. Ainsi, puisque $\triangle A_1OB$ est isocèle, il doit aussi être équilatéral. Comme pour notre triangle original, on a

$\angle BA_2A_1 = 120°$ et donc $\angle A_2BA_1 = \angle A_2A_1B = 30°$ (car $A_2B = A_2A_1$). On en déduit ensuite que $\angle OBA_2 = 30° = \angle OBC$, ce qui démontre que A_2 repose sur le segment BC.
En utilisant la loi des sinus pour le triangle $\triangle BOC$, on trouve

$$OC \;=\; \frac{BC\sin(\angle OBC)}{\sin(\angle BOC)} \;=\; \frac{6(1/2)}{\sqrt{3}/2} \;=\; 2\sqrt{3}\,.$$

Par symétrie, on remarque que (i) OA_1 est la bissectrice de $\angle BOC$ et la médiatrice de BC, (ii) les trois points A, O, et A_1 sont colinéaires. Ainsi, $A_1A = A_1O + OA = 2\,OA = 4\sqrt{3}$.
Le même argument qui nous a permis de montrer que $\triangle A_1OB$ est équilatéral avec côté $AC/\sqrt{3}$ démontre que $\triangle A_3A_2A_1$ est équilatéral avec côté $OB/\sqrt{3} = 2$. Donc $\angle A_3A_1O = \angle OA_1B + \angle A_3A_1A_2 - \angle A_2A_1B = 60° + 60° - 30° = 90°$. Par le théorème de Pythagore,

$$A_3A \;=\; \sqrt{(A_3A_1)^2 + (A_1A)^2} \;=\; \sqrt{2^2 + (4\sqrt{3})^2} \;=\; \sqrt{52} \;>\; \sqrt{49} \;=\; 7.$$

<u>Deuxième méthode</u> : (Une alternative aux justifications de la première méthode est d'utiliser la géométrie analytique. Une fois que les coordonnées des différents points sont identifiées, les arguments textuels peuvent être omis au profit du calcul de la distance.)
Prenons $(0;0)$ comme le point B, $(6;0)$ comme le point C et $(3;\sqrt{3})$ comme le point A. Ainsi, nous avons $AB = BC = CA = 6$.
Le centre du cercle circonscrit O du $\triangle ABC$ est $(3;\sqrt{3})$. Cette affirmation peut être vérifiée en calculant $OA = OB = OC = 2\sqrt{3}$.
Ensuite, le point $A_1 = (3;-\sqrt{3})$ satisfait $A_1O = A_1B = A_1C = 2\sqrt{3}$, donc A_1 est le centre du cercle circonscrit du $\triangle BOC$.
Le point $A_2 = (2;0)$ satisfait $A_2O = A_2B = A_2A_1 = 2$, il est donc le centre du cercle circonscrit à $\triangle OBA_1$.
Le point $A_3 = (1;-\sqrt{3})$ satisfait $A_3B = A_3A_2 = A_3A_1 = 2$, il est donc le centre du cercle circonscrit à $\triangle BA_2A_1$.
Pour terminer, on calcule $A_3A \;=\; \sqrt{52} \;>\; \sqrt{49} \;=\; 7$ pour démontrer (a).

(b) Dans la partie (a), en utilisant une des deux méthodes, on trouve que $OA_3 = 4 > 2\sqrt{3} = OA$. En faisant une rotation de $\pm 120°$ de la figure présentée en (a) autour de O, Amélie peut construire les points B_3 et C_3 de façon à ce que $\triangle A_3B_3C_3$ est équilatéral et dont le cercle circonscrit a son centre en O et un rayon de longueur 4, ce qui est strictement supérieur au rayon $2\sqrt{3}$ du cercle circonscrit de $\triangle ABC$. Amélie peut alors répéter ce processus en débutant avec $\triangle A_3B_3C_3$. Après n itérations du processus, Amélie aura tracé les points d'un triangle dont le rayon du cercle circonscrit est de $2\sqrt{3}\,(\frac{4}{2\sqrt{3}})^n$, ce qui est supérieur à 2019 lorsque n est suffisamment grand.

2. Soit a et b des entiers strictement positifs tels que $a+b^3$ est divisible par $a^2+3ab+3b^2-1$. Démontrez que $a^2+3ab+3b^2-1$ est divisible par le cube d'un entier supérieur à 1.

Solution. Soit $Z = a^2+3ab+3b^2-1$. Par hypothèse, il existe un entier positif c tel que $cZ = a+b^3$. En remarquant la ressemblance entre les trois premiers termes de Z et ceux de l'expansion de $(a+b)^3$, on écrit

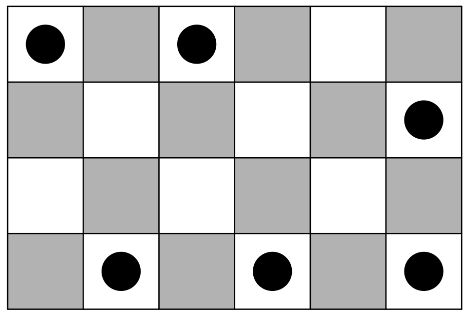
$$(a+b)^3 \;=\; a(a^2+3ab+3b^2)+b^3 \;=\; a(Z+1)+b^3 \;=\; aZ+a+b^3 \;=\; aZ+cZ\,.$$

Ainsi, Z divise $(a+b)^3$.

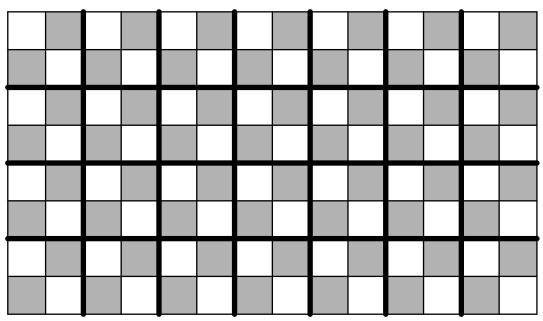
Supposons que la factorisation de $a+b$ est $p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k}$ et supposons que $Z = p_1^{f_1}p_2^{f_2}\cdots p_k^{f_k}$, où $f_i \le 3e_i$ pour tout i puisque Z divise $(a+b)^3$. Si Z n'est pas divisible par un cube parfait, alors $0 \le f_i \le 2$ et donc $f_i \le 2e_i$ pour tout i. Ceci implique que Z divise $(a+b)^2$. Par contre, $(a+b)^2 < a^2+3ab+3b^2-1 = Z$ puisque $a, b \ge 1$, ce qui est une contradiction. Ainsi, Z doit être divisible par un cube parfait supérieur à 1.

Remarque. Une approche par force brute nous donne plusieurs paires (a, b) qui satisfont cette propriété de divisibilité. Certains exemples sont $(3; 5), (19; 11), (111; 29)$ ainsi que douze autres paires telles que $a, b \le 1000$. Les valeurs de $a^2+3ab+3b^2-1$ pour ces trois paires sont $128 = 2^7$, $1350 = 2\times 3^3\times 5^2$ et $24500 = 2^2\times 5^3\times 7^2$ qui sont toutes divisibles par des cubes parfaits.

3. Soit m et n des entiers strictement positifs. Une grille $2m \times 2n$ de carrés est colorée à la manière d'un échiquier standard. Déterminez le nombre de façons de placer mn jetons sur les carrés blancs, au plus un jeton par carré, de façon à ce que deux jetons ne soient jamais sur des cases diagonalement adjacentes. Un exemple d'une façon de placer les jetons pour $m = 2$ et $n = 3$ est montrée plus bas.



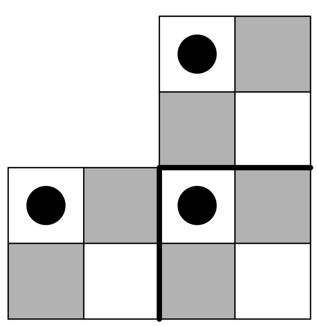
Solution. On divise la grille en mn carrés 2×2.



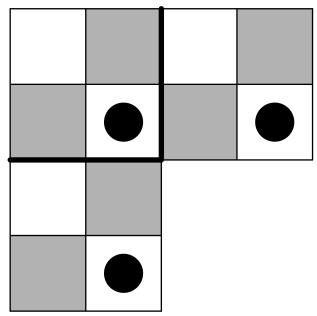
Chaque carré 2×2 peut contenir au plus un jeton. Puisqu'on veut placer mn jetons, chaque carré 2×2 doit contenir exactement un jeton.

Supposons que le coin inférieur droit de la grille $2m \times 2n$ est blanc. Alors dans chaque carré 2×2, le coin supérieur gauche et inférieur droit sont blancs. On dit qu'un carré 2×2 est SG si le jeton qu'il contient est dans le coin supérieur gauche et on dit qu'il est ID si le jeton qu'il contient est dans le coin inférieur droit.

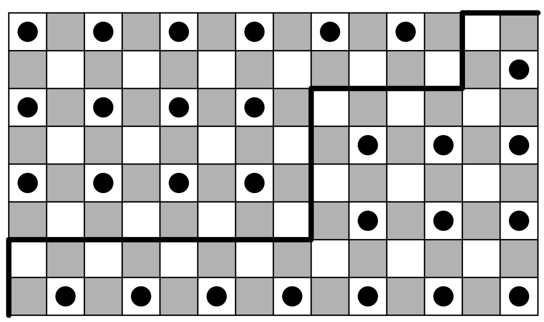
Supposons qu'un carré 2×2 est SG. Alors le carré 2×2 au-dessus de lui (s'il y en a un) doit aussi être SG et le carré 2×2 à sa gauche (s'il y en a un) doit aussi être SG.



De la même façon, si un carré 2×2 est ID, alors le carré 2×2 en-dessous de lui (s'il y en a un) doit aussi être ID et le carré 2×2 à sa droite (s'il y en a un) doit aussi être ID.



Ainsi, la collection des carrés SG 2×2 forme une région qui est complétée vers le haut et vers la gauche de la grille tandis que la collection de carrés ID 2×2 forme une région qui est complétée vers le bas et vers la droite du carré. Ceci veut dire que la frontière qui sépare les deux régions relie le coin inférieur gauche au coin supérieur droit de la grille $2m \times 2n$.



À l'inverse, n'importe quel chemin reliant le coin inférieur gauche et le coin supérieur droit où chaque pas consiste en deux unités peut être la frontière entre les deux régions. Ainsi, le nombre de façons de placer les jetons correspond au nombre de tels chemins, qui sont au nombre de $\binom{m+n}{m}$.

4. Soit n un entier supérieur à 1 et soit $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres réels tels que $a_1 = a_{n-1} = 0$. Démontrez que pour n'importe quel nombre réel k,

$$|a_0| - |a_n| \ \le \ \sum_{i=0}^{n-2} |a_i - ka_{i+1} - a_{i+2}| \, .$$

Première solution.
Soit $Q(x) = x^2 - kx - 1$ et $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Remarquons que le produit des deux racines de $Q(x)$ est -1 et donc une des deux racines vaut au plus 1 en valeur absolue. Posons z comme cette racine. Puisque $a_1 = a_{n-1} = 0$, on a que

$$\begin{aligned} 0 = Q(z)P(z) &= -a_0 - ka_0z + \sum_{i=0}^{n-2}(a_i - ka_{i+1} - a_{i+2})z^{i+2} - ka_nz^{n+1} + a_nz^{n+2} \\ &= a_0(-1 - kz) + \sum_{i=0}^{n-2}(a_i - ka_{i+1} - a_{i+2})z^{i+2} + a_nz^n(z^2 - kz) \\ &= -a_0z^2 + \sum_{i=0}^{n-2}(a_i - ka_{i+1} - a_{i+2})z^{i+2} + a_nz^n \end{aligned}$$

où la troisième égalité suit du fait que $z^2 - kz - 1 = 0$. L'inégalité du triangle donne ensuite

$$\begin{aligned} |a_0| \cdot |z|^2 &\le |a_n| \cdot |z|^n + \sum_{i=0}^{n-2} |a_i - ka_{i+1} - a_{i+2}| \cdot |z|^{i+2} \\ &\le |a_n| \cdot |z|^2 + \sum_{i=0}^{n-2} |a_i - ka_{i+1} - a_{i+2}| \cdot |z|^2 \end{aligned}$$

puisque $|z| \le 1$ et $n \ge 2$. Comme $z \ne 0$, l'inégalité est obtenue en divisant par $|z|^2$.

Deuxième solution. Soit k un nombre réel.

$$R \ = \ \begin{cases} \sqrt{k^2+4} & \text{si } k \ge 0, \\ -\sqrt{k^2+4} & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

Définissons le polynôme

$$S(x) \ = \ x^2 + Rx + 1 \, .$$

Les racines de S sont

$$b \ = \ \frac{-R-k}{2} \quad \text{et} \quad c \ = \ \frac{-R+k}{2} \, .$$

Ainsi nous avons

$$b - c \ = \ -k, \quad bc \ = \ 1, \quad \text{et} \quad |c| \le 1$$

(l'inégalité est obtenue puisque $bc = 1$ et $|c| \le |b|$).

Posons $d_i = a_i + b\,a_{i+1}$ pour $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Donc pour $i = 0, 1, \ldots, n-2$, on a

$$\begin{aligned} d_i - c\,d_{i+1} &= a_i + (b-c)a_{i+1} - bc\,a_{i+2} \\ &= a_i - k\,a_{i+1} - a_{i+2}\,. \end{aligned}$$

Conséquemment,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-2} |a_i - k\,a_{i+1} - a_{i+2}| &= \sum_{i=0}^{n-2} |d_i - c\,d_{i+1}| \\ &\geq \sum_{i=0}^{n-2} (|d_i| - |c|\,|d_{i+1}|) \\ &= |d_0| + (1-|c|)\sum_{i=1}^{n-2} |d_i| - |c|\,|d_{n-1}| \\ &\geq |d_0| - |c|\,|d_{n-1}| \\ &= |a_0 + b\,a_1| - |c|\,|a_{n-1} + b\,a_n| \\ &= |a_0| - |bc|\,|a_n| \\ &= |a_0| - |a_n|\,. \end{aligned}$$

5. David et Jacob jouent à un jeu qui consiste à relier $n \geq 3$ points du plan. Trois points ne sont jamais colinéaires. À son tour, un joueur choisit deux points à relier par un nouveau segment de droite. Le premier joueur à compléter un cycle qui consiste en un nombre impair de segments de droite perd la partie. (Les extrémités de chaque segment de droite du cycle doivent faire partie des n points donnés et non ceux qui sont formés par les intersections des segments tracés.) Si David débute la partie, trouvez toutes les valeurs de n pour lesquelles il a une stratégie gagnante.

   Solution.
   Réponse : David a une stratégie gagnante si et seulement si $n \equiv 2 \pmod 4$.

   On dit qu'un mouvement est *illégal* s'il crée un cycle de longueur impaire. Tout d'abord, on montre que si n est impair, alors n'importe quelle stratégie où Jacob effectue un mouvement légal lorsqu'il est possible d'en faire un lui assure la victoire. Supposons par contradiction qu'il est impossible à un certain moment pour Jacob de faire un mouvement légal. Puisque le graphe qui représente le jeu à ce moment ne compte aucun cycle impair, il doit être biparti. Soit a et b la taille des deux ensembles de sommets du graphe biparti. Si un sommet du premier ensemble et un sommet du deuxième ensemble ne sont pas reliés par une arête, l'ajout du segment correspondant serait un mouvement légal pour Jacob. Ainsi, il s'agit d'un graphe biparti complet qui compte donc ab arêtes. Par contre, puisque $a+b=n$ qui est impair, soit a ou b doit être pair et le graphe contient donc un nombre pair d'arêtes. Puisqu'il s'agit du tour de Jacob, le graphe doit contenir un nombre impair d'arêtes, ce qui est une contradiction. Jacob a donc une stratégie gagnante pour toutes les valeurs impaires de n.

   On considère maintenant le cas où n est pair. On dit qu'un graphe est *bon* si l'ensemble des sommets de degré au moins 1 sont dans un couplage parfait (un ensemble d'arêtes non adjacentes qui touchent à tous les sommets du graphe). L'observation clé est que chaque joueur possède une façon de conserver le fait que le graphe est bon tout en augmentant le nombre de sommets de degré 1. Plus précisément, si le graphe était bon à la fin de son tour précédent et qu'il y a moins de n sommets de degré au moins 1, alors un joueur peut toujours s'assurer qu'à la fin de son tour : (1) le graphe est bon (2) il y a au moins deux sommets supplémentaires de degré 1 ou plus qu'à la fin de son tour précédent.

   Soit A l'ensemble des sommets de degré au moins 1 à la fin du tour précédent du joueur et B l'ensemble des sommets restants, où $|B| > 0$. Puisque les sommets de A sont dans un couplage parfait, $|A|$ est pair et puisque n est pair, $|B|$ l'est aussi. Si l'autre joueur ajoute une arête entre deux sommets de A, alors on ajoute une arête entre deux sommets de B. Si l'autre joueur ajoute une arête entre deux sommets de B, alors on ajoute une arête entre un de ces sommets et un sommet de A (au premier tour, lorsque A est vide, on ajoute une arête entre deux sommets de B). Si l'autre joueur ajoute un arête entre un sommet de A et un sommet de B, alors puisque $|B|$ est pair, il reste au moins un autre sommet de B. On relie alors les deux sommets de B par une arête. Aucun de ces mouvements ne peut former de cycle, ils sont donc légaux. De plus, ceux-ci satisfont tous (1) et (2), démontrant l'affirmation.

   On montre ensuite que David a une stratégie gagnante si $n \equiv 2 \pmod 4$. Puisque le graphe est vide à l'origine, il est donc bon et David a une stratégie lui permettant de s'assurer qu'il reste bon après au plus n tours. Par la suite, supposons que David effectue un mouvement légal s'il est possible pour lui de faire un tel mouvement. Supposons par contradiction qu'à un certain moment, il soit impossible pour David de faire un mouvement légal.

   Le graphe doit alors être un graphe complet biparti qui possède un couplage parfait. Si un des ensembles de sommets du graphe biparti a une taille supérieure à $n/2$, cet ensemble doit contenir deux sommets qui sont reliés dans le couplage parfait, ce qui est impossible. Ainsi, chaque ensemble de sommet du graphe biparti compte $n/2$ sommets et $n^2/4$ arêtes ont été ajoutées au total, un nombre impair. Ceci contredit le fait que c'est le tour de David, et démontre le résultat pour $n \equiv 2 \pmod 4$. Finalement, on considère le cas où $n \equiv 0 \pmod 4$. Après le premier tour de David, le graphe contient une seule arête et est donc bon. Ceci implique que Jacob peut s'assurer que le graphe conserve son couplage parfait et peut gagner par l'argument de parité utilisé plus tôt.