Olympiade mathématique du Canada
2012

Problème 1

Soit x, y et z trois nombres réels positifs. Montrer que

$$x^2 + xy^2 + xyz^2 \geq 4xyz - 4.$$

Solution 1

Notons que

$$\begin{aligned} x^2 &\geq 4x - 4, \\ y^2 &\geq 4y - 4, \text{ et} \\ z^2 &\geq 4z - 4. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$x^2 + xy^2 + xyz^2 \geq (4x - 4) + x(4y - 4) + xy(4z - 4) = 4xyz - 4.$$

Problème 2

Soit $L(n, k)$ le plus petit commun multiple de la suite des k entiers consécutifs $n, n+1, \ldots, n+k-1$, où n et k sont deux entiers positifs quelconques. Montrer que pour tout entier b, il existe des nombres entiers n et k tels que $L(n, k) > bL(n + 1, k)$.

Solution 2

I. Soit $p > b$ un nombre premier, $n = p^3$ et $k = p^2$. Si $p^3 < i < p^3 + p^2$, alors aucune puissance de p supérieure à 1 ne divise i tandis que p divise $p^3 + p$. Par conséquent, $L(p^3, p^2) = p^2 L(p^3 + 1, p^2 - 1)$. Par un raisonnement analogue, on montre que $L(p^3 + 1, p^2) = pL(p^3 + 1, p^2 - 1)$. Donc $L(p^3, p^2) = pL(p^3 + 1, p^2) > bL(p^3 + 1, p^2)$.

II. Étant donné $m > 1$, on a que $L(m! - 1, m + 1)$ est le plus petit commun multiple des entiers $m! - 1$ à $m! + m - 1$. Mais $m! - 1$ est premier avec chacun des nombres suivants : $m!, m! + 1, \ldots, m! + m - 1$. Il s'ensuit que $L(m! - 1, m + 1) = (m! - 1)M$, où $M = \text{PPCM}(m!, m! + 1, \ldots, m! + m - 1)$. Considérons maintenant $L(m!, m + 1)$, le $\text{PPCM}(M,\ m! + m)$. Comme $m! + m = m\big((m - 1)! + 1\big)$ et m

divise M, PPCM$(M,\ m!+m) \le M\big((m-1)!+1\big)$ et

$$\frac{L(m!-1, m+1)}{L(m!, m+1)} \ge \frac{m!-1}{(m-1)!+1}.$$

Comme m peut être arbitrairement grand, il en va de même pouri $L(m!-1, m+1)/L(m!, m+1)$. Il suffit alors de prendre $n = m!-1$ pour m suffisamment grand et $k = m+1$.

Problème 3

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et P le point d'intersection des droites AC et BD. Supposons que $AC + AD = BC + BD$. Montrer que les bissectrices des angles internes de $\angle ACB$, $\angle ADB$, et $\angle APB$ se coupent en un point.

Solution 3

I. Construisons A' sur CA de sorte que $AA' = AD$ et B' sur CB de sorte que $BB' = BD$. Nous avons donc trois bissectrices qui correspondent à la médiatrice de $A'B'$, $A'D$ et $B'D$. Ces médiatrices sont concourantes, ce qui implique que les bissectrices sont concourantes. Ceci signifie que les bissectrices des angles externes A et B se rencontrent au centre du cercle circonsrit au triangle PDB. Un argument symétrique pour C complète la démonstration.

II. Notons que les bissectrices de $\angle ACB$ et de $\angle APB$ se rencontrent au centre du cercle circonsrit au triangle PBC opposé à C et les bissectrices de $\angle ADB$ et de $\angle APB$ se rencontrent au centre du cercle circonsrit au triangle $\triangle PAD$ opposé à D. Il suffit donc de montrer que ces deux centres coïncident.

Désignons par X le point où le cercle circonsrit au $\triangle PBC$ opposé à C rencontre PB, par Y le point où ce cercle rencontre CP par Z le point où ce cercle rencontre CB. Alors $CY = CZ$, $PX = PY$ et $BX = BZ$. Par conséquent, $CP + PX = CB + BX$ et alors $CP + PX + CB + BX$ est le périmètre du $\triangle CBP$, $CP + PX = CB + BX = s$, où s est la moitié du périmètre du $\triangle CBP$. Donc,

$$PX = CB + BX - CP = \frac{s}{2} - CP = \frac{CB + BP + PC}{2} - CP = \frac{CB + BF - PC}{2}.$$

De même, si on désigne par Y le point où le cercle circonsrit au $\triangle PAD$ opposé à D rencontre PA, alors

$$PX' = \frac{DA + AP - PD}{2}.$$

Comme ces deux cercles circonscrits sont tangeants à AC et BD, il suffit de montrer que $PX = PX'$ pour confirmer que ces deux cercles circonscrits sont tangeants à AC et BD en un même point, ce qui signifierait que ces deux cercles circonscrits sont identiques et que leur centres coïncident.

On utilise le fait que $AC + AD = BC + BD$ pour montrer que $PX = PX'$. Comme $AC + AD = BC + BD$, $AP + PC + AD = BC + BP + PD$. Donc $AP + AD - PD = BC + BP - PC$. Ainsi, $PX = PX'$, comme désiré.

PROBLÈME 4

Un certain nombre de robots sont placés sur les carrés d'une grille rectangulaire de dimension finie. Chaque carré peut contenir un nombre quelconque de robots. Les bords des carrés de la grille sont classés comme *franchissables* ou *infranchissables*. Les côtés qui forment le pourtour de la grille sont infranchissables.

Vous pouvez donner les commandes suivantes: en *haut*, en *bas*, à *gauche* ou à *droite*. Tous les robots tentent alors de se déplacer simultanément dans la direction précisée. Si le bord adjacent au carré vers lequel se déplace un robot est franchissable, le robot le franchit et se place dans le carré suivant. Sinon, le robot reste dans le carré où il se trouve. Vous pouvez ensuite donner une autre commande de déplacement vers le *haut*, le *bas*, la *gauche* ou la *droite*, et une autre commande, aussi nécessaire que vous le considérez.

Supposons que pour chaque robot, et ce, pour n'importe quel carré, il existe une suite finie de commandes qui amèneront ce robot au carré donné. Démontrez que vous pouvez aussi donner une suite finie de commandes de sorte que tous les robots finiront par se retrouver simultanément dans le même carré.

SOLUTION 4

Nous allons montrer que si on choisit deux robots au hasard, alors il existe une suite finie de commandes qui les amènent au même carré. Une fois dans le même carré, ils y demeureront toujours.

À cette fin, considérons deux robots A et B. Notons par $d(A, B)$ le nombre minimal de commandes nécessaires afin que A se déplace sur le carré *présentement* occupé par B. On donne une procédure qui garantit la décroissance de $d(A, B)$. Comme $d(A, B)$ est un entier positif non-nul, cette procédure va éventuellement se réduire à 0, complétant la démonstration.

Soit $n = d(A, B)$ et soit $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ la suite minimale de déplacements qu'il faut afin que A se déplace pour atteindre le carré occupé par B. Il va sans dire que A ne va pas recevoir l'instruction de se déplacer dans la direction d'un bord infranchissable au cours de cette procédure sans quoi il serait possible de trouver une série d'instructions plus courte. Supposons maintenant que B reçoit l'instruction a_x qui impose un déplacement dans la direction d'un bord infranchissable. Il est alors possible de faire en sorte que A se déplace sur le carré initialement occupé par B en communiquant la suite d'instructions $s_{i+1}, s_{i+2}, \ldots, s_n$, puis en poursuivant avec les instructions $s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}$ pour amener A au carré présentement occupé par B. Or, cette procédure ne comporte que $n - 1$ commandes. Nous avons donc réduit $d(A, B)$ comme prévu.

Sinon, on a donné une suite de n commandes passées à A et B sans qu'un d'eux s'est déplacé dans la direction d'un bord infranchissable durant l'exécution de ces commandes. En particulier, le vecteur v liant A à B sur la grille n'a pas changé. Nous avons déplacé A à la position $B = A + v$ et, par conséquent, nous avons également déplacé B à la position $B + v$. En répétant cette procédure k fois, nous déplacerons A à la position $A + kv$ et B à la position $B + kv$. Si $v \neq (0, 0)$ alors la procédure va inévitablement finir par forcer B à sortir du pourtour de la grille, ce qui constitue une contradiction.

Problème 5

Sur une étagère il y a n volumes étiquetés de 1 à n, rangés dans un certain ordre. Le bibliothécaire souhaite les mettre dans le bon ordre de la façon suivante: il choisit un volume qui se trouve loin à droite, par exemple le volume étiqueté k, le retire de son endroit et l'insère à la k-ième place. Par exemple, si les volumes sont rangés dans l'ordre 1, 3, 2, 4, le bibliothécaire peut prendre le volume 2 et le mettre à la deuxième place. Les livres sont alors rangés dans le bon ordre, soit 1, 2, 3, 4.

(a) Démontrer que si l'on répète ce processus, tous les volumes finiront par être dans le bon ordre, et ce, qu'elle que soit la manière dont le bibliothécaire les range.

(b) Quel est le plus grand nombre d'étapes exigées par un tel processus?

Solution 5

(a) Si t_k représente le nombre de fois que le volume k est choisi, alors on a $t_k \leq 1 + (t_1 + t_2 + \cdots + t_{k-1})$. En effet, le volume k doit se déplacer vers la droite entre les choix, ce qui signifie qu'un volume a été placé à sa gauche. Cela ne se produit que si un volume étiquetté par un nombre inférieur a été sélectionné. Cela suggère la borne supérieure suivante : $t_k \leq 2^{k-1}$ De plus, $t_n = 0$ car le n-ième volume ne se trouvera jamais loin à droite. Par conséquent, si N représente le nombre total de déplacements, alors

$$N = t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1} \leq 1 + 2 + \cdots + 2^{n-2} = 2^{n-1} - 1,$$

et il s'ensuit en particulier que le procédé va ultimement prendre fin.

(b) Réciproquement, considérons la configuration suivante : $(n, 1, 2, 3, \ldots, n-1)$. Si le bibliothécaire choisit le volume se trouvant le plus à droite alors $2^{n-1} - 1$ déplacements seront requis.

Pour démontrer cette affirmation, on procéde par induction: si à un certain point on se retrouve avec la configuration suivante : $(x, n-k, n-k+1, \ldots,$

$n-1$), alors après $2^k - 1$ déplacements, nous obtiendrons la configuration $(n-k, n-k+1, \ldots, n-1, x)$ sans avoir toucher aux livres qui se trouvent le plus à gauche. En effet, après $2^{k-1} - 1$ déplacements, nous obtenons $(x, n-k+1, n-k+2, \ldots, n-1, n-k)$, qui devient $(n-k, x, n-k+1, n-k+2, \ldots, n-1)$ après un déplacement supplémentaire et, par conséquent, $(n-k, n-k+1, \ldots, n-1, x)$ après $2^{k-1} - 1$ autres déplacements. Le résultat s'en suit en posant $k = n-1$.