Olympiade mathématique du Canada
1996

PROBLÈME 1
Si α, β et γ sont les racines de l'équation $x^3 - x - 1 = 0$, trouver la valeur de l'expression:

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}.$$

SOLUTION 1
Si α, β, γ sont les racines de $f(x) = x^3 - x - 1$, alors $x^3 - x - 1 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$. En comparant les coefficients de deux côtés, on obtient: $\alpha + \beta + \gamma = 0, \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -1$, et $\alpha\beta\gamma = 1$.

Ainsi

$$S = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma} = \frac{N}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$$

où le numérateur N est simplifié de la façon suivante:

$$\begin{aligned} N &= 3 - (\alpha + \beta + \gamma) - (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) + 3\alpha\beta\gamma \\ &= 3 - (0) - (-1) + 3(1) \\ &= 7. \end{aligned}$$

Le dénominateur étant $f(1) = -1$, la somme en question est alors égale à -7.

PROBLÈME 2
Trouver toutes les solutions réelles du système d'équations suivant. Justifier soigneusement votre réponse.

$$\begin{aligned} \frac{4x^2}{1+4x^2} &= y \\ \frac{4y^2}{1+4y^2} &= z \\ \frac{4z^2}{1+4z^2} &= x \end{aligned}$$

SOLUTION 2
Première solution: Pour n'importe quel nombre réel t, on a que $0 \leq 4t^2 < 1 + 4t^2$,

d'où $0 \leq \frac{4t^2}{1+4t^2} < 1$. On conclut que x, y et z sont tous non négatifs et inférieurs à 1.

Observons que si l'un parmi x, y et z est nul, alors $x = y = z = 0$.

Si deux de ces variables sont égales, disons $x = y$, alors la première équation devient

$$\frac{4x^2}{1+4x^2} = x.$$

Cette dernière équation admet deux solutions réelles: $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$. Pour $x = 0$, on obtient que $x = y = z = 0$ et pour $x = \frac{1}{2}$, on obtient que $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Supposons maintenant que x, y et z sont tous non nuls et deux à deux distincts. Sans perte de généralité, on peut supposer que $0 < x < y < z < 1$ ou que $0 < x < z < y < 1$. Comme les deux cas se traitent de façon similaire, nous nous contentons de considérer le premier cas seulement.

Dans ce qui suit, nous utiliserons le fait que $f(t) = \frac{4t^2}{1+4t^2}$ est une fonction croissant sur l'intervalle $(0, 1)$. En effet, si $0 < s < t < 1$ alors

$$\begin{aligned} f(t) - f(s) &= \frac{4t^2}{1+4t^2} - \frac{4s^2}{1+4s^2} \\ &= \frac{4t^2 - 4s^2}{(1+4s^2)(1+4t^2)} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Donc $0 < x < y < z \Rightarrow f(x) = y < f(y) = z < f(z) = x$, ce qui est une contradiction. On conclut que $x = y = z = 0$ et $x = y = z = \frac{1}{2}$ sont les deux seules solutions réelles.

Deuxième solution: Notons que x, y et z sont non négatifs. Ajoutons les trois équations pour obtenir

$$x + y + z = \frac{4z^2}{1+4z^2} + \frac{4x^2}{1+4x^2} + \frac{4y^2}{1+4y^2}.$$

En réarrangeant les termes, on obtient :

$$\frac{x(2x-1)^2}{1+4x^2} + \frac{y(2y-1)^2}{1+4y^2} + \frac{z(2z-1)^2}{1+4z^2} = 0.$$

Comme chacun des termes est non négatif, chaque terme dans la somme est nulle. Alors, la valeur de chacune des variables est soit 0 ou $\frac{1}{2}$. L'équation originale implique ensuite que $x = y = z = 0$ et $x = y = z = \frac{1}{2}$ sont les deux seules solutions.

Troisième solution: Remarquons tout d'abord que x, y et z sont non négatifs. Multiplions les deux côtés de l'inégalité suivante

$$\frac{y}{1+4y^2} \geq 0$$

par $(2y-1)^2$ et réarrangeons les termes pour obtenir

$$y - \frac{4y^2}{1+4y^2} \geq 0,$$

et alors $y \geq z$. De façon similaire, on peut voir que $z \geq x$ et $x \geq y$. Ainsi $x = y = z$ et le reste s'ensuit comme dans la première solution.

Quatrième solution: Comme dans la première solution, on commence par observer que $x = y = z = 0$ est une solution et que dans toute autre solution on doit avoir que x, y et z sont positifs.

L'inégalité arithmético-géomérique (ou un calcul direct) nous permet de montrer que $\frac{1}{2}(1+4x^2) \geq \sqrt{1 \cdot 4x^2} = 2x$, d'où $x \geq \frac{4x^2}{1+4x^2} = y$, avec égalité si et seulement si $1 = 4x^2$, c'est-à-dire $x = \frac{1}{2}$. De même, $y \geq z$ avec égalité si et seulement si $y = \frac{1}{2}$ et $z \geq x$ avec égalité si et seulement si $z = \frac{1}{2}$. En ajoutant $x \geq y$, $y \geq z$ et $z \geq x$, on obtient $x+y+x \geq x+y+z$. Ainsi, chacune des trois inégalités ci-dessus est en fait une égalité. On conclut alors que $x = y = z = \frac{1}{2}$.

PROBLÈME 3

On dénote par $a_1, \ldots, a_n$ une permutation arbitraire des entiers $1, \ldots, n$. Soit $f(n)$ le nombre de telles permutations qui satisfont:

(a) $a_1 = 1$, et

(b) $|a_i - a_{i+1}| \leq 2$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Déterminer si $f(1996)$ est divisible par 3.

SOLUTION 3

On commence par l'importante observation suivante qu'on utile dans le Cas 2(b) ci-dessous: Si a_k et a_{k+1} sont des entiers consécutifs (c'est-à-dire $a_{k+1} = a_k \pm 1$), alors les termes situés à droite de a_{k+1} (et également à gauche de a_k) sont tous inférieurs à a_k et à a_{k+1} ou ils sont tous supérieurs à a_k et à a_{k+1}.

Comme $a_1 = 1$, la propriété (b) implique que a_2 est soit 2, soit 3.

Cas 1: Supposons que $a_2 = 2$. Alors $a_3, a_4, \ldots, a_n$ est une permutation de $3, 4, \ldots, n$. Donc $a_2, a_3, \ldots, a_n$ est une permutation de $2, 3, \ldots, n$ avec $a_2 = 2$

et qui satisfait la propriété (b). On peut vérifier facilement qu'il existe $f(n-1)$ telles permutations.

Cas 2(a): Supposons que $a_2 = 3$ et $a_3 = 2$. Alors $a_4, a_5, \ldots, a_n$ est une permutation de $4, 5, \ldots, n$ avec $a_4 = 4$ et et qui satisfait également la propriété (b). Il existe $f(n-3)$ telles permutations.

Cas 2(b): Supposons que $a_2 = 3$ et $a_3 \geq 4$. Si a_{k+1} est le premier nombre pair dans cette permutation, alors la propriété (b) implique que la permutation $a_1, a_2, \ldots, a_k$ doit être $1, 3, 5, \ldots, 2k-1$ (dans cet ordre). Alors a_{k+1} est soit $2k$ ou $2k-2$, de sorte que a_k et a_{k+1} sont des entiers consécutifs. Grâce à l'observation ci-dessus, on déduit que $a_{k+2}, \ldots, a_n$ sont soit tous supérieurs à a_k et a_{k+1} ou tous inférieurs à a_k et a_{k+1}. Or 2 doit se situer à droite de a_{k+1}. Donc $a_{k+2}, \ldots, a_n$ sont les nombres entiers inférieurs à a_{k+1}. Ainsi, la seule possibilité est

$$1, 3, 5, \ldots, a_{k-1}, a_k, \ldots, 6, 4, 2.$$

Les Cas 1, 2(a) et 2(b) démontrent que

$$f(n) = f(n-1) + f(n-3) + 1 \text{ pour tout } n \geq 4. \qquad (*)$$

Le calcul direct des premières valeurs de $f(n)$ donne:

n	1	2	3	4	5
$f(n)$	1	1	2	4	6

Calculons quelques autres valeurs de $f(n)$ en utilisant $(*)$ et l'arithmétique modulo 3,

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(n) \mod 3$	1	1	2	1	0	0	2	0	1	1	2

Comme $f(1) \equiv f(9) \mod 3$, $f(2) \equiv f(10) \mod 3$ et $f(3) \equiv f(11) \mod 3$, l'équation $(*)$ implique que si $a \equiv b \mod 8$ alors $f(a) \equiv f(b) \mod 3$.

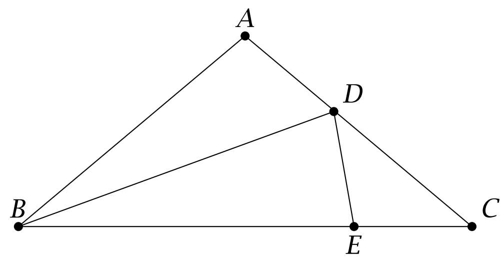
On conclut que $f(1996) \equiv f(4) \equiv 1 \mod 3$ et par conséquence 3 ne divise pas $f(1996)$.

PROBLÈME 4

Soit $\triangle ABC$ un triangle isocèle tel que $AB = AC$. Supposons de plus que le bissecteur de l'angle $\angle B$ coupe AC au point D et que $BC = BD + AD$. Déterminer $\angle A$.

SOLUTION 4

Première solution: Soit E le point sur BC tel que $BE = BD$. Alors $AD = EC$:



Par un théorème classique on a $\frac{AB}{CB} = \frac{AD}{DC}$; ainsi les triangles $\triangle CED$ et $\triangle CAB$ ont un angle commun. On a

$$\frac{CE}{CD} = \frac{AD}{CD} = \frac{AB}{CB} = \frac{CA}{CB}.$$

Donc $\triangle CED \sim \triangle CAB$, ce qui donne que $\angle CDE = \angle DCE = \angle ABC = 2x$. Ainsi $\angle BDE = \angle BED = 4x$ et par suite $9x = 180°$ et $x = 20°$

On conclut que $\angle A = 180° - 4x = 100°$

Seconde solution: Appliquons la loi des sinus à $\triangle ABD$ et $\triangle BDC$ afin d'obtenir

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\sin x}{\sin 4x} \text{ et}$$
$$1 + \frac{AD}{BD} = \frac{BC}{BD} = \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$$

Il suffit ensuite d'appliquer les identités trigonométriques classiques à ces équations pour obtenir :

$$\sin 2x(\sin 4x + \sin x) = \sin 2x(\sin 5x + \sin x)$$

Comme $0 < 2x < 90°$, on obtient

$$5x - 90° = 90° - 4x,$$

d'où $\angle A = 100°$

Problème 5

Soit $r_2, r_2, \ldots, r_m$ un ensemble donné de m nombres rationnels positifs tels que $\sum_{k=1}^{m} r_k = 1$. On définit la fonction f par $f(n) = n - \sum_{k=1}^{m} \lfloor r_k n \rfloor$ pour tout entier positif n. (Le symbole $\lfloor x \rfloor$ signifie le plus grand entier plus petit or égal à x.) Déterminer la valeur minimale et la valeur maximale de $f(n)$.

SOLUTION 5

Soit

$$
\begin{aligned}
f(n) &= n - \sum_{k=1}^{m} \lfloor r_k n \rfloor \\
&= n \sum_{k=1}^{m} r_k - \sum_{k=1}^{m} \lfloor r_k n \rfloor \\
&= \sum_{k=1}^{m} (r_k n - \lfloor r_k n \rfloor).
\end{aligned}
$$

Notons que $0 \le x - \lfloor x \rfloor < 1$. Il s'en suit que $(c + x) - \lfloor c + x \rfloor = x - \lfloor x \rfloor$ pour tout entier c. Donc $0 \le f(n) < \sum_{k=1}^{m} 1 = m$. Comme $f(n)$ est un entier, $0 \le f(n) \le m - 1$.

Afin de montrer que $f(n)$ atteint ces bornes pour $n > 0$, on suppose que $r_k = \frac{a_k}{b_k}$ pour certains entiers a_k et b_k avec $a_k < b_k$.

Si $n = b_1 b_2 \cdots b_m$, alors $(r_k n) - \lfloor rkn \rfloor = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$ et par suite $f(n) = 0$.

Si on prend $n = b_1 b_2 \ldots b_n - 1$, alors

$$
\begin{aligned}
r_k n &= r_k (b_1 b_2 \cdots b_m - 1) \\
&= r_k \big((b_1 b_2 \cdots b_m - b_k) + b_k - 1\big) \\
&= \text{entier} + r_k (b_k - 1).
\end{aligned}
$$

Il s'ensuit que

$$
\begin{aligned}
r_k n - \lfloor r_k n \rfloor &= r_k (b_k - 1) - \lfloor r_k (b_k - 1) \rfloor \\
&= \frac{a_k}{b_k}(b_k - 1) - \left\lfloor \frac{a_k}{b_k}(b_k - 1) \right\rfloor \\
&= (a_k - \frac{a_k}{b_k}) - \left\lfloor a_k - \frac{a_k}{b_k} \right\rfloor \\
&= (a_k - \frac{a_k}{b_k}) - (a_k - 1) \\
&= 1 - \frac{a_k}{b_k} = 1 - r_k.
\end{aligned}
$$

Donc $f(n) = \sum_{k=1}^{m} (1 - r_k) = m - 1$.