45e Olympiade mathématique du Canada

Mercredi le 27 mars 2013

---

1. Trouvez tous les polynômes $P(x)$ à coefficients réels tel que

$$(x+1)P(x-1)-(x-1)P(x)$$

est un polynôme constant.

2. La séquence $a_1, a_2, \ldots, a_n$ consiste des nombres $1, 2, \ldots, n$ dans un ordre quelconque. Pour quels entiers positifs n est-il possible que les $n+1$ nombres 0, a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3$, $\ldots$, $a_1+a_2+\cdots+a_n$ aient tous des restes différents lorsque divisés par $n+1$?

3. Soit G le point de rencontre des médiatrices d'un triangle rectangle ABC avec $\angle BCA = 90°$. Soit P le point sur la droite passant par AG tel que $\angle CPA = \angle CAB$ et Q le point sur la droite passant par BG tel que $\angle CQB = \angle ABC$. Montrez que les cercles circonscrits aux triangles AQG et BPG se croisent en un point sur le segment AB.

4. Soit n un entier positif. Pour tout entier positif j et tout nombre réel positif r, définissons $f_j(r)$ et $g_j(r)$ par

$$f_j(r) = \min\left(jr, n\right) + \min\left(\frac{j}{r}, n\right), \quad \text{et} \quad g_j(r) = \min\left(\lceil jr \rceil, n\right) + \min\left(\left\lceil \frac{j}{r} \right\rceil, n\right),$$

où $\lceil x \rceil$ signifie le plus petit entier supérieur ou égal à x. Montrez que

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(r) \leq n^2 + n \leq \sum_{j=1}^{n} g_j(r)$$

pour tous les nombres réels positifs r.

5. Soit O le centre du cercle circonscrit du triangle aigu ABC. Plaçons le point P sur le côté AB tel que $\angle BOP = \angle ABC$ et le point Q sur le côté AC tel que $\angle COQ = \angle ACB$. Montrez que la réflexion de BC par rapport à PQ est tangente au cercle circonscrit du triangle APQ.