Olympiade mathématique du Canada 1993

PROBLÈME 1

Trouvez un triangle dont les trois côtés et une hauteur constituent quatre nombres entiers consécutifs; de plus, cette hauteur doit subdiviser le triangle en deux triangles droits ayant également des côtés de valeurs entières. Montrer finalement qu'il n'y a qu'un seul de ces triangles.

PROBLÈME 2

Montrer qu'un nombre x est rationnel si et seulement si trois termes distincts formant une progression géométrique puissent être choisis parmi la suite

$$x,\ x+1,\ x+2,\ x+3,\dots$$

PROBLÈME 3

Soit un triangle ABC dont les médianes des côtés AB et AC sont perpendiculaires. Montrer que $\cot B + \cot C \geq \frac{2}{3}$.

PROBLÈME 4

Un certain nombre d'écoles ont pris part à un tournoi de tennis. Bien que deux joueurs de la même école ne s'affrontent jamais, deux joueurs provenant d'écoles différentes joueront exactement un match entre eux. On appelle un match entre deux joueurs de même sexe un *simple* et un match entre deux joueurs de sexe opposé un *simple mixte*. Maintenant si le nombre total de garçons et de filles ne diffèrent que d'un au plus et que le nombre total de match *simples* et *simples mixtes* ne diffèrent également que d'un au plus, quel est le plus grand nombre d'écoles qui puissent êtres représentées par un nombre impair de joueurs?

PROBLÈME 5

Soit $y_1, y_2, y_3, \dots$ une suite dont $y_1 = 1$ et plus généralement les relations suivantes soient satisfaites pour $k > 0$:

$$y_{2k} = \begin{cases} 2y_k & \text{si } k \text{ est pair} \\ 2y_k + 1 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

$$y_{2k+1} = \begin{cases} 2y_k & \text{si } k \text{ est impair} \\ 2y_k + 1 & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

Montrer que la suite $y_1, y_2, y_3, \dots$ énumère chaque nombre entier positif une et une seule fois.