Olympiade mathématique du Canada
1991

PROBLÈME 1

Démontrer que l'équation $x^2 + y^5 = z^3$ possède une infinité de solutions en nombres entiers x, y, z tels que $xyz \neq 0$.

PROBLÈME 2

Soit n un entier positif fixe. Déterminer la somme de tous les entiers positifs ayant la propriété suivante: en base 2, chaque entier est un nombre de $2n$ chiffres qui comprend n fois le chiffre 1 et n fois 0. (Le premier chiffre ne peut pas être 0).

PROBLÈME 3

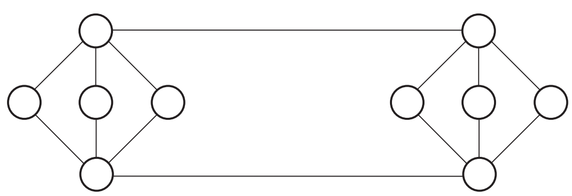
Soient C un cercle et P un point du plan. Toute droite qui passe par P et qui coupe C détermine une corde de C. Démontrer que les points milieux de ces cordes appartiennent à un cercle.

PROBLÈME 4

Est-il possible de choisir dix nombres distincts dans l'ensemble

$$\{0, 1, 2, \ldots, 13, 14\}$$

et de les placer dans les cercles du diagramme de la manière suivante: les valeurs absolues des différences de deux nombres qui sont reliés par un segment doivent être toutes distinctes. Justifier votre réponse.



PROBLÈME 5

Sur la figure, le côté du plus grand triangle équilatéral est égal à 3, et $f(3)$, le nombre de parallélogrammes limités par des segments du diagramme, est égal à 15. Dans la situation générale analogue, établir une formule pour $f(n)$, le nombre de parallélogrammes, pour un triangle de côté n.