

PROBLÈMES POUR AVRIL 2006

Veillez envoyer vos solutions à

Prof. Lily Yen
7255 Hewitt Street
Burnaby, BC V5A 3M3

au plus tard le 31 mai 2006. Il est important que votre adresse postale et votre adresse courriel apparaissent en première page. Si vous écrivez votre nom de famille avant votre prénom, soulignez-le.

437. Soit a, b, c , les longueurs de trois cotés d'un triangle ABC , et m_a, m_b , et m_c , les longueurs de leurs médianes respectivement. Prouvez que

$$\frac{3}{4} < \frac{m_a + m_b + m_c}{a + b + c} < 1 .$$

De plus, montrer que l'on ne peut trouver un intervalle plus restreint pour contenir cette fraction.

438. Déterminer tous les ensembles (x, y, z) de nombres réels tels que

$$x + y = 2 \quad \text{et} \quad xy - z^2 = 1 .$$

439. Un nombre naturel n , plus petit ou égal à 500, possède la propriété suivante: si on choisit un nombre, noté m parmi $\{1, 2, 3, \dots, 500\}$, la probabilité que m divise n (c.-à-d., n/m est un entier) est de $1/100$. Trouver la plus grande valeur possible de n .
440. Vous devez choisir 10 nombres distincts parmi $\{1, 2, 3, \dots, 2006\}$. Montrer qu'il existe plus de manières de choisir ces nombres tels que leur somme dépasse 10039 qu'il a de manières de choisir ces nombres tels que leur somme soit inférieur à 10030.
441. Prouver que, peu importe comment on dispose 15 points à l'intérieur d'un cercle de rayon 2 (en incluant la circonférence), il y existe un cercle de rayon 1 (incluant la circonférence) qui contient au moins 3 de ces 15 points.
442. Prouver que la tétraèdre régulier est le tétraèdre ayant le plus petit diamètre possible parmi tous les tétraèdres qui peuvent circonscrire une certaine sphère. (Le diamètre d'un tétraèdre est la longueur de sa plus longue arête.)
443. Pour $n \geq 3$, montrer que $n - 1$ lignes droites sont suffisantes pour traverser l'intérieur de chaque case d'un échiquier $n \times n$. Est-ce que $n - 1$ lignes sont nécessaires?