Le Défi ouvert canadien de mathématiques 2022

Identité du participant

Veuillez écrire clairement en lettres majuscules et fournir tous les détails requis, à défaut de quoi votre examen pourrait être rejeté.

1. Prénom : (champs obligatoire)

2. Nom de famille : (champs obligatoire)

3. Êtes-vous actuellement inscrit(e) à temps plein à une école primaire, secondaire ou Cégep ou suivez-vous un enseignement à la maison depuis le 15 septembre de cette année? (exigence pour être admissible) ☐ **Oui** ☐ Non

4. Êtes-vous citoyen(ne) canadien(ne) ou résident(e) permanent(e) du Canada? (quelle que soit votre adresse actuelle) (exigence pour être admissible) ☐ **Oui** ☐ Non

5. Souhaitez-vous être considérée (en cas d'admissibilité) pour faire partie de l'équipe canadienne des Olympiades européennes de mathématiques pour les filles (OEMF)? L'événement se déroule en Slovénie en avril 2023. (Seulement les citoyennes canadiennes ou les résidentes permanentes qui s'identifient comme filles sont admissibles.) ☐ **Oui** ☐ Non

6. Date de naissance : (champs obligatoire)

A A A A M M J J

7. Année de scolarité : (champs obligatoire)

☐ 8 ☐ 10 ☐ 12
☐ 9 ☐ 11 ☐ Cégep

autre: ______________

8. Adresse électronique : (champs obligatoire)

NE PAS PHOTOCOPIER LES EXAMENS NON REMPLIS!

Chaque page de chaque exemplaire a un code d'identification unique pour faciliter l'attribution numérique des notes.

Question A1 (4 points)

John avait une boîte de bonbons. Le premier jour, il a mangé exactement la moitié des bonbons et en a donné un à sa petite sœur. Le deuxième jour, il a mangé exactement la moitié des bonbons restants et en a donné un à sa petite sœur. Le troisième jour, il a mangé exactement la moitié des bonbons restants et en a donné un à sa petite sœur, après quoi il ne restait plus aucun bonbon. Combien de bonbons y avait-il dans la boîte au départ ?

Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question A2 (4 points)

Un palindrome est un nombre entier dont les chiffres sont identiques lorsqu'ils sont lus de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple, 565 et 7887 sont des palindromes. Trouvez le plus petit palindrome à six chiffres divisible par 12.

Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Page à identification unique
– aucune photocopie !

Question A3 (4 points)

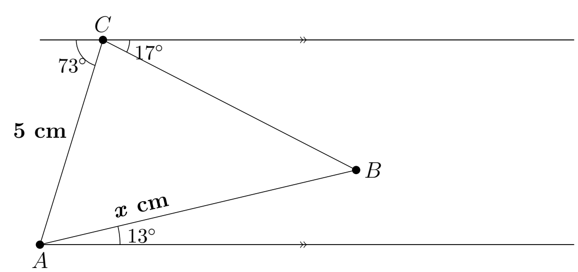
Au départ, il y a quatre boules rouges, sept boules vertes, huit boules bleues, dix boules blanches et onze boules noires sur une table. Chaque minute, nous pouvons repeindre l'une des balles dans l'une des quatre autres couleurs. Quel est le nombre minimum de minutes après lequel le nombre de boules de chacune des cinq couleurs est le même ?

Votre solution :

Votre réponse finale :
[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question A4 (4 points)

Un triangle ABC se trouve entre deux droites parallèles, tel qu'indiqué dans le diagramme ci-dessous. Si le segment AC a une longueur de 5 cm, quelle est la longueur (en cm) du segment AB ?



Votre solution :

Votre réponse finale :
[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Page à identification unique
– aucune photocopie !

Question B1 (6 points)

La fonction plancher de tout nombre réel a est le nombre entier noté $\lfloor a \rfloor$ tel que $\lfloor a \rfloor \leq a$ et $\lfloor a \rfloor > a - 1$. Par exemple, $\lfloor 5 \rfloor = 5$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ et $\lfloor -1.5 \rfloor = -2$.

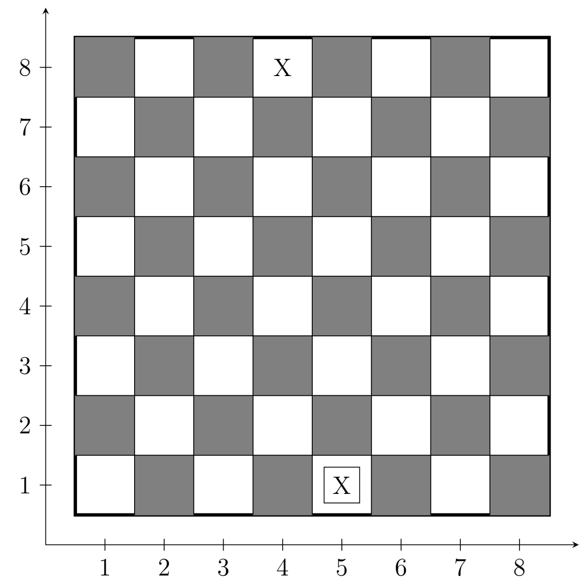
Trouvez la différence entre la plus grande solution entière de l'équation $\lfloor x/3 \rfloor = 102$ et la plus petite solution entière de l'équation $\lfloor x/3 \rfloor = -102$.

Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question B2 (6 points)



Un général de pierre est une pièce d'échecs qui se déplace d'une case en diagonale vers le haut à chaque coup ; c'est-à-dire qu'il peut se déplacer de la coordonnée (a, b) vers l'une ou l'autre des coordonnées $(a-1, b+1)$ ou $(a+1, b+1)$.

Combien de façons y a-t-il pour un général de pierre de se déplacer de $(5, 1)$ à $(4, 8)$ en sept coups sur un échiquier standard 8 par 8 ?

Votre solution :

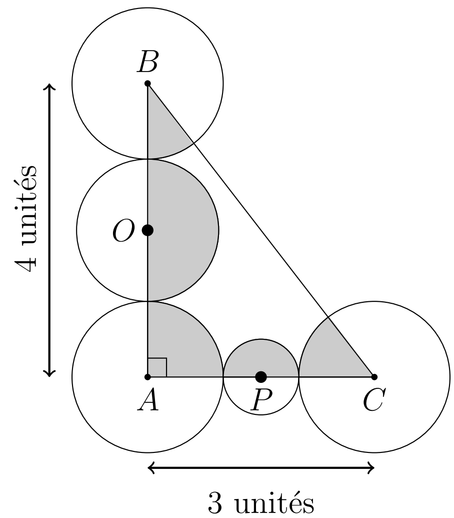
Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question B3 (6 points)

Dans le diagramme ci-dessous, le triangle rectangle ABC a des côtés de longueur $AC = 3$ unités, $AB = 4$ unités et $BC = 5$ unités. Les cercles centrés autour des sommets du triangle ont tous le même rayon et le cercle de centre O a une aire 4 fois supérieure à celle du cercle de centre P. L'aire ombragée est de $k\pi$ unités carrées.

Combien vaut k ?



Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question B4 (6 points)

Déterminez tous les entiers a pour lesquels $\dfrac{a}{1011-a}$ est un entier pair.

Votre solution :

Votre réponse finale :

[La bonne réponse recevra la totalité des points]

Question C1 (10 points)

(a) Trouvez toutes les valeurs entières de a pour lesquelles l'équation $x^2 + ax + 1 = 0$ n'admet pas de solution réelle en x.

(b) Trouvez toutes les paires d'entiers (a, b) pour lesquelles ni l'équation

$$x^2 + ax + b = 0 \quad \text{ni l'équation} \quad x^2 + bx + a = 0$$

admet une solution réelle en x.

(c) Combien y-a-t-il de paires ordonnées (a, b) d'entiers positifs vérifiant $a \leq 8$ et $b \leq 8$ et pour lesquelles chacunes des équations

$$x^2 + ax + b = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + bx + a = 0$$

admettent deux uniques solutions réelles en x ?

Votre solution :

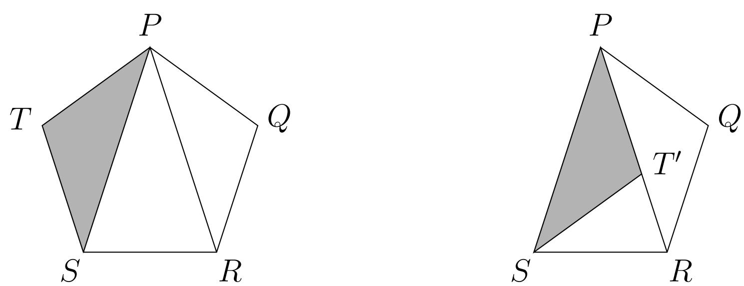
Vous **devrez** montrer comment vous en êtes arrivé.e au résultat final.

Question C1 (suite)

Question C2 (10 points)

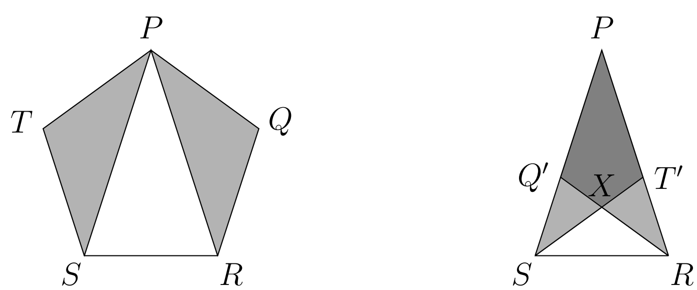
(a) Montrez que les deux diagonales abaissées d'un sommet d'un pentagone régulier trisectent l'angle au sommet .

(b) Puisque les diagonales trisectent l'angle, si le pentagone régulier $PQRST$ est plié le long de la diagonale SP, alors le côté TP tombera sur la diagonale PR, comme illustré ci-dessous. Ici, T' désigne la position du sommet T après le pliage.



Trouvez le rapport $\frac{PT'}{T'R}$. Exprimez votre réponse sous la forme $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$, où a, b et c sont des entiers.

(c) Le pentagone régulier $PQRST$ a une aire de 1 unité carrée. Le pentagone est plié le long des diagonales SP et RP tel qu'illustré à droite. Ici, T' et Q' désignent respectivement la position des sommets T et Q après le pliage. Les segments ST' et RQ' se rencontrent en X.



Déterminez l'aire (en unités carrées) du triangle non recouvert XSR. Exprimez votre réponse sous la forme $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$, où a, b, c sont des entiers.

Question C2 (suite)

Votre solution :

Vous **devrez** montrer comment vous en êtes arrivé.e au résultat final.

Question C3 (10 points)

Yana et Zahid jouent à un jeu. Yana lance sa paire de dés équitables à six faces et dessine un rectangle dont la longueur et la largeur correspondent aux deux nombres qu'elle a obtenu. Zahid lance sa paire de dés équitables à six faces et dessine un carré dont la longueur du côté est conforme à la règle indiquée ci-dessous.

(a) Supposons que Zahid utilise toujours le nombre du premier de ses deux dés comme longueur du côté de son carré, et ignore le second. Qui, de Yana et Zahid, aura en moyen la plus grande surface, et de combien est-elle plus grande ?

(b) Supposons maintenant que Zahid dessine un carré dont la longueur du côté est égale au minimum des résultats de ses deux dés. Quelle est la probabilité que les formes de Yana et de Zahid aient la même surface ?

(c) Supposons à nouveau que Zahid dessine un carré dont la longueur du côté est égale au minimum de ses deux résultats aux dés. Soit $D = \text{Aire}_{\text{Yana}} - \text{Aire}_{\text{Zahid}}$ la différence entre l'aire de la figure de Yana et l'aire de la figure de Zahid. Trouvez l'espérance de D.

Votre solution :

Vous **devrez** montrer comment vous en êtes arrivé.e au résultat final.

Question C3 (suite)

Page à identification unique
– aucune photocopie !

Question C4 (10 points)

Un récipient entier (x, y, z) est un prisme rectangulaire dont les longueurs des côtés sont des entiers positifs x, y et z, où $x \leq y \leq z$. Un bâton vérifie $x = y = 1$; une plaque vérifie $x = 1$ et $y > 1$; et une boîte vérifie $x > 1$. Il y a 5 récipients entiers de volume 30 : un bâton $(1,\ 1,\ 30)$, trois plaques $(1,\ 2,\ 15)$, $(1,\ 3,\ 10)$ et $(1,\ 5,\ 6)$ ainsi qu'une boîte $(2,\ 3,\ 5)$.

(a) Combien de bâtons, de plaques et de boîtes y a-t-il parmi les récipients entiers de volume 36 ?

(b) Combien de plaques et de boîtes y a-t-il parmi les récipients entiers de volume 210 ?

(c) Supposons que $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ possède k facteurs premiers distincts $p_1, p_2, \ldots p_k$, chacun ayant un exposant entier $e_1 \geq 1, e_2 \geq 1, \ldots e_k \geq 1$ et $k \geq 3$. Combien de boîtes y a-t-il parmi les récipients entiers de volume n ? Exprimez votre réponse en termes de $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Combien de boîtes de volume $n = 8!$ y a-t-il ?

Votre solution :

Vous **devrez** montrer comment vous en êtes arrivé.e au résultat final.

Question C4 (suite)

Question C4 (suite)

Commanditaires

Partenaires académiques

Dalhousie University
Memorial University
MacEwan University
Polytechnique Montréal
Université d'Ottawa
University of British Columbia
University of Calgary
University of Manitoba
University of New Brunswick
University of Prince Edward Island
University of Saskatchewan
University of Toronto
University of Waterloo
York University