XV^{ième} Olympiade Mathématique Asie–Pacifique
Mars 2003

Temps alloué: 4 heures
Aucune calculatrice n'est permise
Chaque problème porte une valeur totale de 7 points

Problème 1.

Soient a, b, c, d, e, f des nombres réels tels que le polynôme

$$p(x) = x^8 - 4x^7 + 7x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

se factorise en huit facteurs linéaires $x - x_i$, avec $x_i > 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, 8$. Déterminer toutes les valeurs possibles de f.

Problème 2.

Supposons avoir une pièce carrée de carton $ABCD$ dont chaque côté ait pour longeur a. Sur un plan on trouve deux droites parallèles ℓ_1 et ℓ_2, distantes de a unités. Le carré $ABCD$ est alors placé sur le plan de sorte que les côtés AB et AD intersectent ℓ_1 en E et F respectivement. De même, les côtés CB et CD intersectent ℓ_2 en G et H respectivement. Soient finalement m_1 et m_2 les périmètres des triangles $\triangle AEF$ et $\triangle CGH$ respectivement. Montrer que quoi que soit la façon de placer le carré, $m_1 + m_2$ demeure constant.

Problème 3.

Soit $k \geq 14$ un entier, et soit p_k le plus grand nombre premier strictement plus petit que k. Vous pouvez supposer que $p_k \geq 3k/4$. Soit maintenant un nombre composé n. Montrer que:

(a) si $n = 2p_k$, alors n ne divise pas $(n-k)!$;

(b) si $n > 2p_k$, alors n divise $(n-k)!$.

Problème 4.

Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle, avec $a + b + c = 1$, et soit $n \geq 2$ un entier. Montrer que

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} + \sqrt[n]{b^n + c^n} + \sqrt[n]{c^n + a^n} < 1 + \frac{\sqrt[n]{2}}{2} \ .$$

Problème 5.

Étant donnés deux entiers positifs m et n, trouver le plus petit entier positif k tel que parmi k personnes quelconques, on y trouve ou bien $2m$ d'entre elles formant m paires de personnes se connaissent l'un l'autre, ou alors $2n$ d'entre elles formant n paires de personnes ne se connaissant pas l'un l'autre.