XIII^{ème} OLYMPIADE MATHÉMATIQUE
DE L'ASIE DU PACIFIQUE
Mars 2001

Temps alloué: 4 heures
Aucune calculatrice n'est permise
Chaque problème porte une valeur totale de 7 points

Problème 1. Pour un entier positif n posons $S(n)$ comme étant la somme des chiffres dans la représentation décimale de n. Tout entier positif obtenu après avoir enlever plusieurs (au moins un) chiffres de la partie droite de la représentation décimale de n est appelé une *souche* de n. Soit maintenant $T(n)$ la somme de toutes les souches de n. Montrer que $n = S(n) + 9T(n)$.

Problème 2. Trouver le plus grand entier positif N tel que le nombre d'entiers pris parmi l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N\}$ et qui soient divisibles par 3 soit le même que le nombre d'entiers qui soient divisibles par 5 ou 7 (ou les deux).

Problème 3. Soient deux n-gones réguliers égaux S et T situés dans le plan de sorte que leur intersection forme un $2n$-gone ($n \geq 3$). Les côtés du polygone S sont coloriés en rouge et ceux de T en bleu.
Montrer que la somme des longueurs des côtés bleus du polygone $S \cap T$ soit égale à la somme des longueurs des côtés rouges.

Problème 4. Un point dans le plan ayant un système de coordonnées cartésiennes est appelé un *point mixte* si l'une de ses coordonnées est un nombre rationnel et l'autre un nombre irrationnel. Trouver tous les polynômes à coefficients réels dont leur graphe ne contient aucun point mixte.

Problème 5. Trouver le plus grand nombre entier n, tel qu'il existe $n + 4$ points A, B, C, D, X_1, $\ldots$, X_n dans le plan de sorte que $AB \neq CD$ et satisfaisant à la condition suivante: pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$ les triangles ABX_i et CDX_i sont égaux.