OLYMPIADE MATHÉMATIQUE
DE L'ASIE DU PACIFIQUE 1998

Temps alloué: 4 heures
Aucune calculatrice n'est permise
Chaque problème porte une valeur totale de 7 points

(1) Soit F l'ensemble des tous les n-uplets $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ où chacun des A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ est un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, 1998\}$. Soit maintenant $|A|$ le nombre d'éléments de l'ensemble A. Trouver le nombre

$$\sum_{(A_1, A_2, \ldots, A_n)} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|.$$

(2) Montrer que pour tout entier positif a et b, $(36a + b)(a + 36b)$ ne puisse jamais être une puissance de 2.

(3) Soient a, b, c des nombres réels positifs. Montrer que

$$(1 + \frac{a}{b})(1 + \frac{b}{c})(1 + \frac{c}{a}) \geq 2\left(1 + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

(4) Soit ABC un triangle et D le pied de la hauteur provenant de A. Soit maintenant deux points E et F sur la droite passant par D de sorte que AE soit perpendiculaire à BE, AF perpendiculaire à CF, et E et F différents de D. Si M et N sont respectivement les points milieux des segments de droite BC et EF, alors montrer que AN est perpendiculaire à NM.

(5) Déterminer le plus grand de tous les entiers n ayant la propriété que n soit divisible par tous les entiers positifs plus petits ou égaux à $\sqrt[3]{n}$.