

Mars, 1995

*Temps alloué: 4hrs.*

*Aucune calculatrice autorisée.*

*Chaque problème porte une valeur de 7 points.*

**Problème 1.-** Déterminer toutes les suites de nombres réels  $a_1, a_2, \dots, a_{1995}$  qui satisfont:

$$2\sqrt{a_n - (n-1)} \geq a_{n+1} - (n-1), \text{ pour } n = 1, 2, \dots, 1994,$$

de plus que

$$2\sqrt{a_{1995} - 1994} \geq a_1 + 1.$$

**Problème 2.-** Soit  $a_1, a_2, \dots, a_n$  une suite de nombres entiers dont les valeurs se situent entre 2 et 1995 et telle que:

i) les  $a_i$  soient relativement premiers.

ii) chaque  $a_i$  soit lui-même premier ou alors un produit de nombres premiers différents.

Déterminer la plus petite valeur de  $n$  de sorte que la suite contienne nécessairement un nombre premier.

**Problème 3.-** Soit  $PQRS$  un quadrilatère cyclique (c.-à-d.  $P, Q, R, S$  sont tous sur un cercle) tel que les droites  $PQ$  et  $RS$  ne soient pas parallèles. Considérons maintenant l'ensemble des cercles contenant  $P$  et  $Q$ , et l'ensemble des cercles contenant  $R$  et  $S$ . Déterminer l'ensemble  $A$  des points de tangence des cercles de ces deux ensembles.

**Problème 4.-** Soit  $C$  un cercle de rayon  $R$  et centre  $O$ , et  $S$  un point fixe à l'intérieur de  $C$ . Étant donné un point  $A$  sur le cercle, formons les cordes perpendiculaires  $AA'$  et  $BB'$  passant par  $S$ , et finalement les rectangles  $SAMB$ ,  $SBN'A'$ ,  $SA'M'B'$ , et  $SB'NA$ . Trouver l'ensemble de tous les points  $M, N', M'$ , et  $N$  lorsque  $A$  se déplace complètement autour du cercle.

**Problème 5.-** Trouver le plus petit entier positif  $k$  tel qu'il existe une fonction  $f$  de l'ensemble  $Z$  de tous les nombres entiers à  $\{1, 2, \dots, k\}$  ayant la propriété que  $f(x) \neq f(y)$  chaque fois que  $|x - y| \in \{5, 7, 12\}$ .