PROBLÈMES POUR JANVIER 2006

Veuillez envoyer vos solutions à

Prof. Edward J. Barbeau
Department of Mathematics
University of Toronto
40 St. George Street, Room 6290
Toronto, ON M5S 2E4

au plus tard le 28 février 2006. Il est important que votre adresse postale et votre adresse courriel apparaissent en première page. Si vous écrivez votre nom de famille avant votre prénom, soulignez-le.

423. Prouvez ou réfutez: si x et y sont des nombres réels avec $y \geq 0$ et $y(y+1) \leq (x+1)^2$, alors $y(y-1) \leq x^2$.

424. Transformer l'expression suivante:

$$\frac{x^3 - 3x + (x^2-1)\sqrt{x^2-4} - 2}{x^3 - 3x + (x^2-1)\sqrt{x^2-4} + 2}$$

en une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont de la forme $u\sqrt{v}$ où u et v représentent des polynômes de degré 1. Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles cette fraction existe?

425. Soit $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ une séquence de nombres réels positifs. Montrer que cette séquence est une série arithmétique si et seulement si, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}x_n} = \frac{n-1}{x_1x_n} \ .$$

426. (a) La méthode de pliage suivant permet de faire la trisection d'un angle aigu.

(1) Transcrivez l'angle sur le coin P d'une feuille rectangulaire de telle sort qu'il corresponde à l'angle formé par le bord de la feuille (PY) et la droite joignant P et X. Nommons cet angle XPY.

(2) Plier le long de QZ afin que le segment PY corresponde maintenant au segment RW, tel que $PQ = QR$ et PY, QZ et RW sont parallèles. QZ se trouve entre PY et RW.

(3) Plier la ligne AC avec A sur la feuille et C sur le segment PY tel que P se retrouve à présent au point P' sur QZ et R, au point R' sur PX.

(4) Supposons que le pliage AC croise le pliage QZ au point B et fait correspondre Q avec Q'; faites un pliage sur BQ'.

On affirme que le pliage BQ' passe par P et divise en trois angles égaux l'angle XPY.

Expliquer pourquoi la partie (3) est possible. Est-ce que la méthode fonctionne? Pourquoi?

(b) Qu'arrive-t-il si on applique la méthode à un angle droit?

(c) Est-ce que la méthode peut être adaptée pour un angle obtus?

427. Les rayons des trois cercles excrits et du circle inscrit d'un triangle sont des terms consécutifs dans une série géométrique. Déterminer le plus grand angle de ce triangle.

428. **a**, **b** et **c** représentent 3 droites dans l'espace. **a** et **b** ne sont pas perpendiculaires à **c** Les points P et Q sont situés respectivement sur les droites **a** et **b**, de telle sorte que la droite passant par P et Q est perpendiculaire à **c**. Le plan perpendiculaire à **b** passant par P rencontre **c** au point R et le plan perpendiculaire à **a** passant par Q rencontre **c** au point S. Prouver que la distance RS est constante.

429. Prouver que

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \binom{kn}{n} = (-1)^{n+1} n^n \ .$$